07285

(1

BIBLIOTECA NAZIONALE MARCIANA NAPOLI

COURS

DE MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE

DES GARDES DU PAVILLON

ET DE LA MARINE.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie des Sciences et de la Marine, Examinateur des Gardes du Pavillon et de la Marine, des Eleves et des Aspirans au Corps de l'Artillerie.

PREMIERE PARTIE.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

INSTITUTO GEOGRAFICO MILITARE BIBLIOTECA NAPOLI

A PARIS,

De l'Imprimerie de PH.-D. PIERRES, rue St.-Jacques.

1793.

PRÉFACE.

Le Cours de Mathématiques dont nous donnons aujourd'hui la premiere Partie, doit rassembler les connoissances élémentaires que l'on a jugé nécessaires d'exiger des Gardes du Pavillon et de la Marine, avant de les admettre au rang d'Officiers de Vaisseaux.

Quelque utile qu'il soit d'instruire de bonne heure les jeunes Gens, dans la pratique d'un art aussi étendu que celui de la Navigation, on ne peut douter que la connoissance préliminaire des principes sur lesquels portent les règles de l'art, ne doive contribuer beaucoup à faire fructifier les leçons qu'ils recevront ensuite de l'expérience, ne les dispose à y être plus attentifs, et par conséquent n'accélere beaucoup leurs progrès.

D'ailleurs, il est si rare qu'un esprit accoutumé à obéir servilement aux seules règles de la pratique, se replie ensuite assez sur lui-même, pour revenir avec succès à l'étude de la théorie, qu'on ne peut trop tôt les disposer à profiter des avantages qu'ils peuvent retirer de celle-ci.

Presque toutes les méthodes de la Navigation-pratique sont fondées sur des connoissances mathématiques : comment pourroit-on différer d'instruire des principes des ces sciences, ceux qui sont destinés à en diriger un jour l'application.

Pour me conformer, autant qu'il est en moi, aux vues du Ministre qui a bien voulu me confier l'examen des études des Gardes du Pavillon et de la Marine, ainsi que la composition d'un Cours de Mathématiques à leur usage, j'ai cru devoir m'attacher à concilier ces deux points, la nécessité d'instruire ces Eleves sur les connoissances mathématiques relatives à leur objet, et celle de les en instruire dans un intervalle de tems qui ne leur fit rien perdre de l'avantage qu'il doit y avoir à aller de bonne heure à la Mer.

Pour satisfaire à ces deux objets, je me suis proposé 1°. de borner le Cours d'Etudes d'o-

bligation, aux propositions directement utiles à la Navigation, et à celles qui seroient indispensables pour l'intelligence de celles-là. 2°. De faciliter cette étude, en la rendant plus intéressante par de fréquentes applications à la pratique, prises principalement dans la Marine; ce qui réunit encore l'avantage de disposer l'esprit des Commençants à saisir de bonne heure le lien qui unit la théorie à la pratique.

Mais dans la vue de concourir, autant qu'il m'est possible, au progrès d'un art aussi important, jai cru devoir ne pas perdre de vue ceux de ces jeunes Gens qui, joignant à une noble émulation, des dispositions plus marquées que les autres, auroient le desir de s'instruire plus parfaitement. C'est dans cette vue que j'aurai soin de répandre, dans ce Cours, des connoissances plus étendues, et spécialement celles qui peuvent faciliter l'intelligence des ouvrages de feu M. Bouguer, et de quelques autres ouvrages non moins utiles à la Marine, dont on n'a pas encore retiré, à beaucoup près, tout le fruit qu'on peut en espérer, parce que les études des Gardes n'y étoient pas dirigées aussi pleinement qu'on se propose de le faire.

Ces connoissances qu'il est louable d'acquérir; et auxquelles on ne peut trop inviter les Gardes du Pavillon et de la Marine de s'appliquer; ces connoissances, dis-je, ne seront point d'obligation, et nous aurons soin de les distinguer de celles-ci, par un caractère dont nous avertirons.

Le cours de Mathématiques dont il s'agit ici, sera divisé en quatre Parties.

La premiere traite de l'Arithmétique.

La seconde traitera de la Géométrie, dans laquelle on comprendra la Trigonométrie rectiligne et la Trigonométrie sphérique.

La troisieme aura pour objet, l'Algèbre et l'application de l'Algèbre à la Géométrie.

La quatrieme comprendra la Statique et le Mou-

vement, avec quelques propositions d'Hydrostatique et d'Hdraulique.

Nous avons préféré de faire succéder l'Algèbre à la Géométrie plutôt qu'à l'Arithmétique ; parce qu'outre que l'algèbre nous eût été d'une utilité très-médiocre dans la Géométrie élémentaire, les commençans ne sont d'ailleurs pas encore assez exercés dans les raisonnemens mathématiques, pour sentir la force des démonstrations algèbriques, quoique celles-ci soient souvent plus simples, que les démonstrations synthétiques ; au lieu que dans la disposition que nous avons choisie, on a lieu de croire que les commençans, déja fortifiés par l'étude des deux premieres Parties, en auront d'autant plus de facilité à généraliser leurs idées, et saisiront mieux les usages nombreux qu'on peut faire de cette science ; d'ailleurs ayant déja plus de connoissances acquises, ils seront plus à portée de se familiariser avec cette science, par un plus grand nombre d'objets auxquels ils pourront l'appliquer.

Nous n'entrerons ici dans aucun détail sur l'exécution des trois dernieres parties du Cours ; nous nous bornerons à rendre compte de celle-ci. Elle renferme, sous un volume assez peu considérable, ce qu'il est nécessaire de savoir, non-seulement pour appliquer les connoissances mathématiques que nous enseignerons par la suite, mais encore pour satisfaire à divers autres usages. En exposant les méthodes, nous avons évité de les multiplier pour un même objet, parce qu'on ne peut veiller trop soigneusement à ne pas partager l'attention dans les commencemens ; c'est un abus que de dire, en faveur de l'opinion contraire, qu'il est utile d'envisager un objet sous différens aspects : cela n'est vrai que lorsqu'on a acquis un certain nombre de connoissances. C'est par ce même principe que nous avons cru devoir resserrer les raisonnemens et les discours dans beaucoup d'endroits : les commençans, peu ou point du tout

faits à raisonner méthodiquement, perdent, en parcourant un long échafaudage de logique, la force de tête qui leur est nécessaire pour saisir l'esprit d'une démonstration.

On a donc fait en sorte de ne donner aux raisonnemens, que l'étendue nécessaire pour être bien entendus, et d'en élaguer ces attentions scrupuleuses qui vont jusqu'à démontrer des axiomes, et qui, à force de supposer le Lecteur inepte, conduisent enfin à le rendre tel.

J'ai tâché d'applanir la route, soit en simplifiant des raisonnemens déja employés, soit en leur en substituant de nouveaux qui m'ont paru plus clairs, soit enfin en employant un langage familier et simple. C'est au Public à juger si j'ai réussi; mais on ne doit pas s'attendre que le Lecteur soit dispensé d'un certain degré d'attention : on ne fera jamais un livre de Mathématiques qui puisse être lu comme on lit un livre d'Histoire.

Je ne suppose d'autre connoissance à mon Lecteur, que celle des nombres et quelques autres idées aussi familieres sur lesquelles j'établis les principes de la numération, tant des nombres entiers que des décimales. Je passe de-là aux quatre opérations fondamentales, dont je donne le procédé, et dont j'explique la nature et les principes de maniere à en faciliter l'application aux opérations plus composées qui en dépendent. A la suite de ces opérations, j'en indique quelques usages. Les fractions sont traitées à peu-près de la même maniere.

Les nombres complexes dont le calcul suppose, à la rigueur, la connoissance des fractions, succèdent à celles-ci. Quoique je n'aie pas parlé du Toisé, les règles que j'ai établies, ne le renferment pas moins; mais la connoissance de la nature des unités des facteurs et du produit, appartenant à la Géométrie, j'ai différé, pour cette raison, d'en parler jusqu'à ce tems.

Quoique je ne désapprouve pas qu'on emprunte d'une science les notions qui peuvent faciliter celle que l'on traite (quelque subordination qu'on ait d'ailleurs coutume de mettre entre ces deux sciences), néanmoins je pense qu'on ne doit prendre ce parti, que lorsqu'il ne s'en offre pas de plus simples. Comme l'Arithmétique m'a paru fournir des ressources suffisantes pour l'explication des opérations de la racine quarrée et de la racine cubique, je n'ai pas été puiser ailleurs que dans les principes même de cette science.

Ce que j'expose des Rapports, Proportions et Progressions, quoique court, me paroît renfermer ce qui nous sera nécessaire pour les trois Parties qui doivent suivre. Cependant, comme nous pouvons, sans nous écarter de la loi que nous nous sommes imposée, revenir sur quelques propriétés des progressions, que quelques Lecteurs pourroient désirer, nous avertissons que nous les avons réservées pour application de l'Algèbre.

Les logarithmes sont d'un trop grand usage dans la pratique de la Navigation, pour que nous n'ayons pas dû nous en occuper spécialement. Aussi après avoir exposé la nature, la formation et ceux des usages de ces nombres, que nous pouvions exposer sans anticiper sur aucune autre science, nous avons donné les moyens d'étendre, dans le besoin, les secours qu'on peut tirer des tables ordinaires.

Quoiqu'on puisse faire un grand nombre d'applications de l'Arithmétique à la Navigation, ce n'est cependant pas dans l'Arithmétique même qu'elles peuvent trouver leur place, parce qu'elles supposent presque toutes, au moins la Géométrie. Néanmoins dans le nombre des applications que nous avons données, nous avons pris quelques exemples dans le métier même. A mesure que nous avancerons, elles deviendront et plus nombreuses et plus importantes : on en trouvera d'ailleurs un très-grand nombre dans le *Traité de Navigation* qui forme la suite de ce Cours.

AVERTISSEMENT.

Les nombres que l'on trouve entre deux parenthèses, dans plusieurs endroits de ce Livre, sont destinés à indiquer à quel numéro on doit aller chercher la démonstration de la proposition sur laquelle on s'appuie dans ces endroits. A l'égard des numéros, ils sont au commencement des à lineâ.

Ce que l'on trouvera en petits caractères, renferme les objets qui ne sont pas d'obligation dans le Cours d'Etudes des Gardes du Pavillon et de la Marine.

ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE.

NOTIONS préliminaires sur la nature et les différentes espèces de Nombres.

1. ON appelle, en général, *quantité*, tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. L'étendue, la durée, le poids, etc. sont des quantités. Tout ce qui est quantité, est de l'objet des Mathématiques; mais l'Arithmétique, qui fait partie de ces Sciences, ne considère les quantités, qu'en tant qu'elles sont exprimées en nombres.

2. L'Arithmétique est donc la science des nombres: elle en considère la nature et les propriétés; et son but est de donner des moyens faciles tant pour représenter les nombres, que pour les composer et décomposer, ce qu'on appelle *calculer*.

3. Pour se former une idée exacte des nombres, il faut d'abord savoir ce qu'on entend par *unité*.

4. L'unité est une quantité que l'on prend (le plus souvent arbitrairement) pour servir de terme de comparaison à toutes les quantités d'une même espece.

Ainsi, lorsqu'on dit, un tel corps pèse cinq livres; la livre est l'unité; c'est la quantité, à laquelle on compare le poids de ce corps; on auroit pu, également, prendre l'once pour unité, et alors le poids de ce corps eût été marqué par quatre-vingts.

5. Le nombre exprime de combien d'unités, ou de parties d'unité, une quantité est composée.

Si la quantité est composée d'unités entières, le nombre qui l'exprime s'appelle *nombre entier*: et si elle est composée d'unités entières, et de parties de l'unité, ou simplement de parties de l'unité, alors le nombre est dit *fractionnaire* ou *fraction : trois et demi* sont un nombre fractionnaire : *trois quarts* forment une fraction.

6. Un nombre qu'on énonce sans désigner l'espèce des unités, comme quand on dit simplement *trois* ou *trois fois*, *quatre* ou *quatre fois*, s'appelle un *nombre abstrait*, et lorqu'on énonce en même temps l'espèce des unités, comme quand on dit *quatre livres*, *cent tonneaux*, on l'appelle *nombre concret*.

Nous définirons les autres espèces de nombres, à mesure qu'il en sera question.

De la Numération et des Décimales.

7. La *numération* est l'art d'exprimer tous les nombres, par une quantité limitée de noms et de caractères. Ces caractères s'appellent *chiffres*.

Nous nous dispenserons de donner ici les noms des nombres; c'est une connoissance familiere à tout le monde.

Quant à la maniere de représenter les nombres par des chiffres, plusieurs raisons nous engagent à en exposer les principes.

8. Les caractères dont on fait usage dans la numération actuelle, et les noms des nombres qu'ils représentent, sont tels qu'on les voit ici :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf.

Pour exprimer tous les autres nombres, avec ces caractères, on est convenu que de dix unités, on en feroit une seule, à laquelle on donneroit le nom de *dizaine*, et que l'on compteroit par dizaines comme on compte par unités, c'est-à-dire, que l'on compteroit *deux dizaines*, *trois dizaines*, etc. jusqu'à 9 dizaines : que, pour représenter ces nouvelles unités, on emploieroit les mêmes chiffres que pour les unités simples, mais qu'on les distingueroit de celles-ci, par la place qu'on leur feroit occuper, en les mettant à la gauche des unités simples.

Ainsi, pour représenter *cinquante-quatre*, qui renferment cinq dixaines et quatre unités, on est convenu d'écrire 54. Pour représenter *soixante*, qui contiennent un nombre exact de dixaines et point d'unités, on écrit 60, en mettant un zéro, qui, tout à la fois, marque qu'il n'y a point d'unités simples, et que le nombre 6 est un nombre de dixaines.

On peut, par ce moyen, compter jusqu'à quatre-vingt-dix-neuf inclusivement.

9. Remarquons, en passant, cette propriété de la numération actuelle, savoir, qu'un chiffre placé à la gauche d'un autre, ou suivi d'un zéro, représente un nombre dix fois plus grand que s'il étoit seul.

10. Depuis 99, on peut compter jusqu'à neuf cents quatre-vingt-dix-neuf, par une convention semblable. De dix dixaines, on composera une seule

unité qu'on nommera *Centaine*, parce que dix fois dix font cent ; on comptera ces centaines, depuis un jusqu'à neuf, et on les représentera par les mêmes chiffres, mais en plaçant ces chiffres à la gauche des dixaines.

Ainsi, pour marquer *huit cents cinquante-neuf*, qui contiennent huit centaines, cinq dixaines et neuf unités, on écrira 859. Si on avoit *huit cents neuf*, qui contiennent huit centaines, point de dixaines et neuf unités, on écriroit 809 ; c'est-à-dire, que l'on mettroit un zéro, pour tenir la place des dixaines qui manquent. Si les unités manquoient aussi, on mettroit deux zéros ; ainsi pour marquer *huit cents*, on écriroit 800.

11. Remarquons encore, qu'en vertu de cette convention, un chiffre suivi de deux autres, ou de deux zéros, marque un nombre cent fois plus grand que s'il étoit seul.

12. Depuis neuf cents quatre-vingt-dix-neuf, on peut compter, par le même artifice, jusqu'à neuf mille neuf cents quatre-vingt-dix-neuf ; en formant de dix centaines, une unité qu'on appelle *mille*, parce que dix fois cent font mille ; comptant ces unités comme ci-devant, et les représentant par les mêmes chiffres placés à la gauche des centaines.

Ainsi, pour marquer *sept mille huit cents cinquante-neuf*, on écrira 7859 ; pour marquer *sept mille neuf*, on écrira 7009 ; et pour *sept mille*, on écrira 7000 ; où l'on voit qu'un chiffre, suivi de trois autres ou de trois zéros, marque un nombre mille fois plus grand que s'il étoit seul.

13. En continuant, ainsi, de renfermer dix unités d'un certain ordre, dans une seule unité, et de placer ces nouvelles unités dans des rangs de plus en plus avancés, vers la gauche, on parvient à exprimer d'une maniere uniforme et avec dix caractères seulement, tous les nombres entiers imaginables.

14. Pour énoncer facilement un nombre exprimé par tant de chiffres qu'on voudra, on le partagera, par la pensée, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche : on donnera à chaque tranche les noms suivans, en partant de la droite; *unités*, *mille*, *millions*, *billions*, *trillions*, *quatrillions*, *quintillions*, *sextillions*, etc. Le premier chiffre de chaque tranche (en partant toujours de la droite) aura le nom de la tranche : le second, celui de dixaines ; et le troisieme, celui de centaines; alors en partant de la gauche, on énoncera chaque tranche, comme si elle étoit seule, et on prononcera, à la fin de chacune, le nom de cette même tranche.

Par exemple, pour énoncer le nombre suivant :

quatrillions,	trillions,	billions,	millions,	mille,	unités,
23,	456,	789,	234,	565,	456.

On dira vingt-trois *quatrillions*, quatre cents cinquante-six *trillions*, sept cents quatre-vingt-neuf *billions*, deux cents trente-quatre *millions*, cinq cents soixante-cinq *mille*, quatre cents cinquante-six *unités*.

15. De la numération que nous venons d'exposer, et qui est purement de convention, il résulte qu'à mesure qu'on avance de droite à gauche, les unités dont chaque nombre est composé, sont de dix en dix fois plus grandes, et que par conséquent pour rendre un nombre dix fois, cent fois, mille fois plus grand, il suffit de mettre à la suite du chiffre de ses unités, un, deux, trois, etc. zéros : au contraire, à mesure qu'on rétrograde de gauche à droite, les unités sont de dix en dix fois plus petites.

16. Telle est la numération actuelle : elle est la base de toutes les autres manières de compter, quoique dans plusieurs arts on ne s'assujettisse pas toujours uniquement à compter par dixaines, par dixaines de dixaines, etc.

17. Pour évaluer les quantités plus petites que l'unité qu'on a choisie, on partage celle-ci en d'autres unités plus petites. Le nombre en est indifférent en lui-même ; il suffit qu'il puisse mesurer les quantités qu'on a dessein de mesurer ; mais ce qu'on doit avoir principalement en vue, dans ces sortes de divisions, c'est de rendre les calculs le plus commodes qu'il sera possible ; c'est pour cette raison, qu'au lieu de partager d'abord l'unité en un grand nombre de parties, afin de pouvoir évaluer les plus petites, on ne la partage, d'abord, qu'en un certain nombre de parties, et qu'on subdivise celles-ci, en d'autres, et ces nouvelles, encore en d'autres plus petites. C'est ainsi que, dans les monnoies, on partage la livre en 20 parties qu'on appelle *sous*, le sou en 12 parties qu'on appelle *deniers*. De même dans les mesures de poids, on partage la livre en 2 *marcs*, le marc en 8 *onces*, l'once, en 8 *gros*, etc. en sorte que dans le premier cas, on compte par vingtaines et par douzaines ; dans le second, par deuxaines et par huitaines, etc.

18. Un nombre qui est composé de parties rapportées, ainsi, à différentes unités, est ce qu'on appelle un nombre *complexe* ; et par opposition, celui qui ne renferme qu'une seule espece d'unités, s'appelle *nombre incomplexe*. 8 liv. ou 8 livres sont un nombre incomplexe. 8 liv. 17 s 8 d ou 8 livres 17 sous 8 deniers, sont un nombre complexe.

19. Chaque art subdivise, à sa maniere, l'unité principale qu'il s'est choisie. Les subdivisions de la toise sont différentes de celles de la livre ; celles de la livre différentes de celles du jour, de l'heure ; celles-ci différentes de celles du marc, et ainsi de suite : nous les ferons connoître lorsque nous traiterons des nombres complexes.

20. Mais de toutes les divisions et subdivisions qu'on peut faire de l'unité, celles qui se fait par décimales, c'est-à-dire, en partageant l'unité en parties de dix en dix fois plus petites, est incontestablement la plus commode dans les calculs. Elle est fort en usage dans la pratique des Mathématiques; la formation et le calcul des décimales sont absolument les mêmes que pour les nombres ordinaires ou entiers : nous allons les faire connoître.

21. Pour évaluer, en décimales, les parties plus petites que l'unité, on conçoit que cette unité, telle qu'elle soit, livres, toise, etc. est composée de 10 parties, comme on imagine la dixaine composée de dix unités simples, ou comme on imagine la livre composée de 20 sous. Ces nouvelles unités, par opposition aux dixaines, sont nommées *dixièmes*; on les représente par les mêmes chiffres que les unités simples; et comme elles sont dix fois plus petites que celles-ci, on les place à la droite du chiffre qui représente les unités simples.

Mais pour prévenir l'équivoque, et ne point donner lieu de prendre les unités pour des dixaines, on est convenu en même temps de fixer, une fois pour toutes, la place des unités, par une marque particulière : celle qui est le plus en usage, est une virgule que l'on met à la droite du chiffre qui représente les unités, ou, ce qui est la même chose, entre les unités et les dixièmes.

Ainsi, pour marquer vingt-quatre unités et trois dixièmes, on écrira 24,3.

22. On peut, de même, regarder actuellement les dixièmes, comme des unités qui ont été formées de dix autres, chacune dix fois plus petite que les dixièmes; et par la même raison d'analogie, les pla-

cer à la droite des *dixièmes*. Ces nouvelles unités, dix fois plus petites que les dixièmes, seront cent fois plus petites que les unités principales, et pour cette raison seront nommées *centièmes*.

Ainsi, pour marquer vingt-quatre unités, trois dixièmes, et cinq centièmes, on écrira 24,35.

23. Concevons pareillement les centièmes, comme formés de dix parties; ces parties seront mille fois plus petites que l'unité principale, et pour cette raison seront nommées *millièmes*; et comme dix fois plus petites que les *centièmes*, on les placera à la droite de celles-ci. En continuant de subdiviser ainsi de dix en dix, on formera de nouvelles unités qu'on nommera successivement des *dix-millièmes*, *cent-millièmes*, *millionièmes*, *dix-millionièmes*, *cent-millionièmes*, *billionièmes*, etc. et qu'on placera dans des rangs de plus en plus reculés sur la droite de la virgule.

24. Les parties de l'unité, que nous venons de décrire, sont ce qu'on appelle les *décimales*.

25. Quant à la manière de les énoncer, elle est la même que pour les autres nombres. Après avoir énoncé les chiffres qui sont à la gauche de la virgule, on énonce les décimales de la même manière; mais on ajoute à la fin, le nom des unités décimales de la dernière espèce.

Ainsi, pour énoncer ce nombre 34,572; on diroit trente-quatre unités, et cinq cents soixante-douze *millièmes;* si c'étoient des toises, par exemple, on diroit trente-quatre toises et cinq cents soixante-douze *millièmes* de toises.

La raison en est facile à appercevoir, si on fait attention que dans le nombre 34,572, le chiffre 5 peut indifféremment être rendu, ou par cinq *dixièmes*, ou par cinq cents *millièmes*, puisque le *dixième*

(22) valant 10 *centièmes*, et le *centième* (23) valant 10 *millièmes*, le *dixième* contiendra 100 *millièmes;* ainsi, que les cinq dixièmes valent 500 *millièmes.* Il en est de même du chiffre 7, qu'on peut indifféremment énoncer, sept *centièmes*, ou soixante-dix *millièmes*, puisque (23) le *centième* a été composé de 10 *millièmes.*

26. A l'égard de l'espèce des unités du dernier chiffre, on la trouvera toujours facilement, en comptant successivement de gauche à droite, sur chaque chiffre depuis la virgule, les noms suivans.... *dixièmes*, *centièmes*, *millièmes*, *dix-millièmes*, etc.

27. Si l'on n'avoit point d'unité entières, mais seulement des parties de l'unité, on mettroit un zéro pour tenir la place des unités ; ainsi, pour marquer 125 *millièmes*, on écriroit 0,125. Si on vouloit marquer 25 *millièmes*, on écriroit 0,025 en mettant un zéro, entre la virgule et les autres chiffres, tant pour marquer qu'il n'y a point de *dixièmes*, que pour donner aux parties suivantes leur véritable valeur. Par la même raison, pour marquer 6 *dix-millièmes*, on écriroit 0,0006.

28. Examinons, maintenant, les changemens qu'on peut faire naître dans un nombre, par le déplacement de la virgule.

Puisque la virgule détermine la place des unités, et que tous les autres chiffres ont des valeurs dépendantes de leurs distances à cette même virgule : si on avance la virgule d'une, deux, ou trois, etc. places sur la gauche, on rend le nombre, 10, 100, 1000, etc. fois plus petit ; et au contraire, on le rend 10, 100, 1000, etc. fois plus grand, si on recule la virgule d'une, deux, trois, etc. places sur la droite.

En effet, si l'on a le nombre 4327,5264; et qu'en avançant la virgule d'une place sur la gauche, on écrive 432,75264, il est visible que les mille du premier nombre, sont des centaines dans le nouveau; les centaines, sont des dixaines, les dixaines, des unités; les unités, des dixièmes; les dixièmes, des centièmes; et ainsi de suite. Donc chaque partie du premier nombre, est devenue 10 fois plus petite par ce déplacement. Si au contraire, en reculant la virgule d'une place sur la droite, on eût écrit 43275,264; les mille du premier nombre se trouveroient changés en dixaines de mille; les centaines, en mille; les dixaines, en centaines; les unités, en dixaines; les dixièmes, en unités; et ainsi de suite. Donc le nouveau nombre est 10 fois plus grand que le premier.

29. Un raisonnement semblable fait voir qu'en avançant la virgule, sur la gauche, de deux ou de trois places, on rendroit le nombre 100 ou 1000 fois plus petit; et au contraire 100 ou 1000 fois plus grand, en reculant la virgule de deux ou de trois places sur la droite.

30. La dernière observation que nous ferons sur les décimales, est qu'on n'en change point la valeur, en mettant à la suite du dernier chiffre décimal, tel nombre de zéros qu'on voudra. Ainsi, 43, 25 est la même chose que 43, 250, ou que 43, 2500, ou que 43,25000, etc.

Car chaque *centième* valant 10 *millièmes*, ou 100 *dix-millièmes*, etc. les 25 *centièmes*, vaudront 250 *millièmes*, ou 2500 *dix-millièmes*, etc. en un mot, c'est la même chose que lorsqu'au lieu de dire 25 pistoles on dit 250 liv. ou que lorsque au lieu de dire 25 quintaux, on dit 2500 liv.

Des Opérations de l'Arithmétique.

31. Ajouter, soustraire, multiplier, et diviser, sont les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique. Toutes les questions qu'on peut proposer sur les nombres, se réduisent à pratiquer quelques-unes de ces opérations, ou toutes ces opérations. Il est donc important de se les rendre familières, et d'en bien saisir l'esprit.

32. Le but de l'Arithmétique est, comme nous l'avons déja dit, de donner des moyens de calculer facilement les nombres. Ces moyens consistent à réduire le calcul des nombres les plus composés, à celui de nombres plus simples, ou exprimés par le plus petit nombre de chiffres possibles. C'est ce qu'il s'agit d'exposer actuellement.

De l'Addition des Nombres entiers et des Parties décimales.

33. Exprimer la valeur totale de plusieurs nombres, par un seul, est ce qu'on appelle *faire une addition.*

Quand les nombres qu'on se propose d'ajouter n'ont qu'un seul chiffre, on n'a pas besoin de regle ; mais lorsqu'ils ont plusieurs chiffres, on trouve leur valeur totale qu'on appelle *somme*, en observant la regle suivante.

Ecrivez, les uns sous les autres, tous les nombres proposés, de manière que les chiffres des unités de chacun, soient dans une même colonne verticale; qu'il en soit de même des dixaines, de même des centaines, etc. soulignez le tout.

Ajoutez, d'abord, tous les nombres qui sont dans la colonne des unités; si la somme ne passe pas 9, écrivez-la au-dessous; si elle surpasse 9, elle renfermera des dixaines; n'écrivez au-dessous que l'excédent du nombre des dixaines: comptez ces dixaines, pour autant d'unités, et ajoutez-les avec les nombres de la colonne suivante: observez à l'égard de la somme des nombres de cette seconde colonne, la même règle qu'à l'égard de la première, et continuez ainsi, de colonne en colonne, jusqu'à la dernière, au-dessous de laquelle vous écrirez la somme telle que vous la trouverez. Eclaircissons cette règle par des exemples.

EXEMPLE I.

Qu'il soit question d'ajouter 54925 avec 2023: j'écris ces deux nombres comme on le voit ici.. 54925
2023
56948 somme.

Et après avoir souligné le tout, je commence par les unités, en disant 5 et 3 font 8, que j'écris sous cette même colonne.

Je passe à celle des dixaines, dans laquelle je dis 2 et 2 font 4, que j'écris au-dessous.

A la colonne des centaines, je dis 9 et 0 font 9, que j'écris sous cette même colonne.

Dans la colonne des mille, je dis 4 et 2 font 6, que j'écris sous cette colonne.

Enfin dans la colonne des dixaines de mille, je dis 5 et rien font 5, que j'écris de même au-dessous.

Le nombre 56948, trouvé par cette opération, est la somme des deux nombres proposés, puisqu'il en renferme les unités, les dixaines, les centaines, les mille, et les dixaines de mille, que nous avons rassemblées successivement.

EXEMPLE II.

On demande la somme des quatre nombres suivans, 6903, 7854, 953, 7327 : je les écris comme on les voit ci-dessous.

6903
7854
953
7327
23037 somme.

Et en commençant, comme ci-dessus, par la droite, je dis 3 et 4 font 7, et 3 font 10, et 7 font 17, j'écris les 7 unités sous la premiere colonne, et je retiens la dixaine pour la joindre, comme unité, aux nombres de la colonne suivante, qui sont aussi des dixaines.

Passant à cette seconde colonne, je dis 1 que je retiens et 0 font 1, et 5 font 6, et 5 font 11, et 2 font 13 ; j'écris 3 sous la colonne actuelle, et je retiens, pour la dixaine, une unité que j'ajoute à la colonne suivante, en disant 1 et 9 font 10, et 8 font 18, et 9 font 27, et 3 font 30 ; je pose 0 sous cette colonne, et je retiens pour les trois dixaines, trois unités, que j'ajoute à la colonne suivante, en disant pareillement 3 et 6 font 9, et 7 valent 16, et 7 font 23 ; j'écris trois sous cette colonne, et comme il n'y a plus d'autre colonne, j'avance d'une place les deux dixaines qui appartiendroient à la colonne suivante, s'il y en avoit une. Le nombre 23037, est la somme des quatre nombres proposés.

34. S'il y a des parties décimales, comme elles se comptent par dixaines, à mesure qu'on avance de droite à gauche, ainsi que les autres nombres, la règle pour les ajouter est absolument la même, en observant de mettre toujours les unités de même ordre, dans une même colonne.

Ainsi, si on propose d'ajouter les trois nombres 72,957..., 12,8.... 124,03, j'écrirai. 72,957
12,8
124,03
209,787 somme.

En suivant la règle ci-dessus, j'aurai 209,787 pour la somme.

De la Soustraction des Nombres entiers et des Parties décimales.

35. La soustraction est l'opération par laquelle on retranche un nombre, d'un autre nombre. Le résultat de cette opération, s'appelle *reste* ou *excès* ou *différence*.

Pour faire cette opération, on écrira le nombre qu'on veut retrancher, au-dessous de l'autre, de la même manière que dans l'addition; et ayant souligné le tout, on retranchera, en allant de droite à gauche, chaque nombre inférieur, de son correspondant supérieur, c'est-à-dire, les unités, des unités; les dixaines, des dixaines, etc. on écrira chaque reste au-dessous, dans le même ordre, et zéro lorsqu'il ne restera rien.

Lorsque le chiffre inférieur se trouvera plus grand que le chiffre supérieur correspondant, on ajoutera à celui-ci, dix unités qu'on aura, en empruntant par la pensée, une unité sur son voisin à gauche, lequel doit, par cette raison, être regardé comme moindre d'une unité, dans l'opération suivante.

EXEMPLE I.

On propose de retrancher 5432, de 8954. J'écris ces deux nombres comme il suit.

8954
5432
3522 reste.

Et en commençant par le chiffre des unités, je dis 2 ôté de 4, il reste 2 que j'écris au-dessous : puis, passant aux dixaines, je dis 3 ôté de 5, il reste 2 que j'écris

sous les dixaines. A la troisième colonne, je dis 4 ôté de 9, il reste 5 que j'écris sous cette colonne. Enfin à la quatrième, je dis 5 ôté de 8, il reste 3 que j'écris sous 5, et j'ai 3522 pour le reste de 5432 retranché de 8954.

EXEMPLE II.

On veut ôter 7987, de 27646.
On écrira..... 27646
7987
19659 reste.

Comme on ne peut ôter 7 de 6, on ajoutera à 6, dix unités qu'on empruntera en prenant une unité sur son voisin 4, et on dira 7 ôté de 16, il reste 9 qu'on écrira sous 7.

Passant aux dixaines, on ne dira plus 8 ôté de 4, mais 8 ôté de 3 seulement, parce que l'emprunt qu'on a fait, a diminué 4 d'une unité : comme on ne peut ôter 8 de 3, on ajoutera de même à 3, dix unités qu'on empruntera, en prenant une unité sur le chiffre 6 de la gauche ; et on dira 8 ôté de 13, il reste 5 qu'on écrira sous 8. Passant à la troisième colonne, on dira, de même, 9 ôté de 5, ou plutôt 9 ôté de 15 (en empruntant comme ci-dessus), il reste 6 qu'on écrira sous 9.

A la quatrième colonne, on dira, par la même raison, 7 ôté de 6, ou plutôt de 16, il reste 9 qu'on écrira sous 7, et comme il n'y a rien à retrancher dans la cinquième colonne, on écrira sous cette colonne, non pas 2, parce qu'on vient d'emprunter une unité sur ce 2, mais seulement 1 et on aura 19659 pour le reste.

36. Si le chiffre sur lequel on doit faire l'emprunt, étoit un zéro, l'emprunt se feroit non pas sur ce zéro, mais sur le premier chiffre significatif qui viendroit après; mais quoique ce soit alors emprunter 100 ou 1000 ou 10000, selon qu'il y a un, deux, ou trois zéros consécutifs, on n'en opérera pas moins comme ci-dessus; c'est-à-dire, qu'on ajoutera seulement 10, au chiffre pour lequel on emprunte; et comme ces dix, sont censés pris sur les 100 ou 1000, etc. qu'on a empruntés, pour employer les 90 ou les 990, etc. qui restent, on

comptera les zéros suivans, pour autant de neuf; c'est ce que l'exemple ci-dessous va éclaircir.

EXEMPLE III.

	99
Si de.....	20064
on veut retrancher	17489
	2575 reste.

On dira d'abord, 9 ôté de 4, ou plutôt de 14 (en empruntant sur le chiffre suivant) il reste 5. Puis pour ôter 8 de 5, comme cela ne se peut, et qu'il n'est pas possible non plus d'emprunter sur le chiffre suivant qui est un zéro, on empruntera sur le 2, une unité, laquelle vaut mille à l'égard du chiffre sur lequel on opère. De ce mille, on ne prendra que 10 qu'on ajoutera à 5, et on dira 8 ôté de 15, il reste 7.

Comme on n'a employé que 10 unités sur mille qu'on a empruntées, on emploiera les 990 restantes, pour en retrancher les nombres qui répondent au-dessous des zéros; ce qui revient au même que de compter chaque zéro, comme s'il valoit 9: ainsi l'on dira 4 ôté de 9 reste 5, puis 7 ôté de 9 reste 2, et enfin 1 ôté de 1 il ne reste rien.

37. S'il y a des parties décimales dans les nombres sur lesquels on veut opérer, on suivra absolument la même règle; mais pour éviter tout embarras dans l'application de cette règle, il n'y aura qu'à rendre le nombre des chiffres décimaux le même dans chacun des deux nombres proposés, en mettant un nombre suffisant de zéros à la suite de celui qui a le moins de décimales; cette préparation ne change rien à la valeur de ce nombre (30).

EXEMPLE IV.

EXEMPLE IV.

De	5403,25
on veut ôter	385,6532

Je mets deux zéros à la suite des décimales du nombre supérieur ; après quoi j'opere sur les deux nombres ainsi préparés, précisément selon l'énoncé de la règle donnée pour les nombres entiers.

5403,2500
385,6532
5017,5968 reste,

et je trouve pour reste 5017,5968.

Au lieu de diminuer d'une unité le chiffre sur lequel on a emprunté, on peut, si l'on veut, le laisser tel qu'il est, et augmenter, au contraire, d'une unité, celui que l'on doit en retrancher : le reste sera toujours le même.

De la preuve de l'Addition et de la Soustraction.

38. Ce qu'on appelle *preuve d'une opération arithmétique*, est une autre opération que l'on fait pour s'assurer de l'exactitude du résultat de la première.

La preuve de l'addition se fait en ajoutant de nouveau, par parties, mais en commençant par la gauche, les sommes qu'on a déjà ajoutées. On retranche la totalité de la première colonne, de la partie qui lui répond dans la somme inférieure : on écrit au-dessous, le reste, qu'on réduit par la pensée en dixaines, pour le joindre au chiffre suivant de cette même somme, et du total on retranche encore la totalité de la colonne supérieure ; on continue ainsi jusqu'à la dernière colonne, dont la totalité étant retranchée ne doit laisser aucun reste.

Ainsi, ayant trouvé ci-dessus que les quatre nombres

6903
7854
953
7327

ont pour somme..... 23037

Pour vérifier ce résultat, j'ajoute les mêmes nombres en commençant par la gauche, et je dis 6 et 7 font 13, et 7 font 20, lesquels ôtés de 23, il reste 3 ou 3 dixaines, qui avec le chiffre suivant 0 font 30. Je passe à la seconde colonne, et je dis 9 et 8 font 17, et 9 font 26, et 3 font 29 que j'ôte de 30; il reste 1 ou une dixaine, qui jointe au chiffre suivant 3 fait 13. J'ajoute tous les nombres de la troisième colonne, en disant 5 et 5 font 10, et 2 font 12, qui ôtés de 13, il reste 1 ou une dixaine, laquelle ajoutée au chiffre suivant 7 fait 17; j'ajoute pareillement tous les nombres de la dernière colonne, en disant 3 et 4 font 7, et 3 font 10, et 7 font 17, qui ôtés de 17, il ne reste rien: d'où je conclus que la première opération est exacte.

On est fondé à conclure que la première opération a été bien faite, lorsqu'après cette preuve il ne reste rien, parce qu'ayant ôté successivement tous les mille, toutes les centaines, toutes les dizaines et toutes les unités dont on avoit composé la somme, il faut qu'à la fin il ne reste rien.

39. La preuve de la soustraction se fait en ajoutant le reste trouvé par l'opération, avec le nombre retranché; si la première opération a été bien faite, on doit reproduire le nombre dont on a retranché.

Ainsi je vois que dans le troisième exemple que nous avons donné ci-dessus, l'opération a été bien faite, parce qu'en ajoutant 17489 (nombre retranché) avec le reste 2575, je reproduis 20064, nombre dont on a retranché.

20064
17489
2575
20064

De la Multiplication.

40. Multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le premier de ces deux nombres, autant de fois qu'il y a d'unités dans l'autre. Multiplier 4 par 3, c'est prendre 4, trois fois.

41. Le nombre qu'on doit multiplier, s'appelle le *multiplicande;* celui par lequel on doit multiplier, s'appelle le *multiplicateur;* et le résultat de l'opération s'appelle *produit.*

42. Le mot *produit* a communément une acception beaucoup plus étendue; mais nous avertissons expressément que nous ne l'emploierons que pour désigner le résultat de la multiplication.

Le multiplicande et le multiplicateur se nomment aussi, *facteurs* du produit; ainsi 3 et 4 sont les facteurs de 12, parce que 3 fois 4 font 12.

43. Suivant l'idée que nous venons de donner de la multiplication, on voit qu'on pourroit faire cette opération en écrivant le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, et faisant ensuite l'addition; par exemple, pour multiplier 7 par 3, on pourroit écrire 7

7
7
21

Et la somme 21 résultante de cette addition ; seroit le produit.

Mais lorsque le multiplicateur est tant soit peu considérable, l'opération devient fort longue ; ce que nous appellons proprement *multiplication*, est la méthode de parvenir à ce même résultat, par une voie plus courte.

44. Tant qu'on ne considère les nombres que d'une manière abstraite ; c'est-à-dire sans faire attention à la nature de leurs unités, il importe peu, lequel des deux nombres proposés pour la multiplication, on prenne pour multiplicande ou pour multiplicateur.

Par exemple, si on a 4 à multiplier par 3, il est indifférent de multiplier 4 par 3, ou 3 par 4, le produit sera toujours 12 : en effet, 3 fois 4, ne sont autre chose que le triple de 1 fois 4 ; et 4 fois 3 sont le triple de 4 fois 1 : or il est évident que 1 fois 4 et 4 fois 1 sont la même chose ; et on peut appliquer le même raisonnement à tout autre nombre.

45. Mais lorsque par l'énoncé de la question, le multiplicateur et le multiplicande sont des nombres concrets, il importe de distinguer le multiplicande du multiplicateur : cette attention est principalement nécessaire dans la multiplication des nombres complexes, dont nous parlerons par la suite.

Au reste, cela est toujours aisé à distinguer : la question qui conduit à la multiplication dont il s'agit, fait toujours connoître quelle est la quantité qu'il s'agit de répéter plusieurs fois ; c'est-à-dire, le multiplicande ; et quelle est celle qui marque combien de fois on doit répéter le multiplicande ; c'est-à-dire, quel est le multiplicateur.

46. Comme le multiplicateur est destiné à marquer combien de fois on doit prendre le multiplicande, il est toujours un nombre abstrait.

Ainsi quand on demande ce que doivent coûter 52 toises de bois, à raison de 36 livres la toise, on voit que le multiplicande est 36 livres, qu'il s'agit de répéter 52 fois, soit que ce 52 marque des toises ou toute autre chose.

47. Le produit qui est formé de l'addition répétée du multiplicande, aura donc des unités de même nature que le multiplicande. *

Après cette petite diggression sur la nature des unités du produit et de ses facteurs, revenons à la méthode pour trouver ce produit.

48. Les règles de la multiplication des nombres les plus composés, se réduisent à multiplier un nombre d'un seul chiffre par un nombre d'un seul chiffre. Il faut donc s'exercer à trouver soi-même le produit des nombres exprimés par un seul chiffre, en ajoutant successivement un même nombre à lui-même.

On peut aussi, si on le veut, faire usage de la Table suivante qu'on attribue à Pythagore.

* Nous n'en exceptons pas même la multiplication géométrique, dont nous ne parlerons qu'en Géométrie, comme cela nous paroît assez naturel. Les unités du multiplicateur n'y sont jamais que des unités abstraites, comme dans toute autre multiplication.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La première bande de cette Table se forme en ajoutant 1 à lui-même, successivement.

La seconde, en ajoutant 2, de même.

La troisième, en ajoutant 3, et ainsi de suite.

49. Pour trouver par le moyen de cette table, le produit de deux nombres exprimés par un seul chiffre chacun, on cherchera l'un de ces deux nombres, le multiplicande, par exemple, dans la bande supérieure; et en partant de ce nombre, on descendra verticalement jusqu'à ce qu'on soit vis-à-vis du multiplicateur qu'on trouvera dans la première colonne. Le nombre sur lequel on se sera arrêté, sera le produit.

Ainsi, pour trouver, par exemple, le produit de 9 par 6 ou combien font 6 fois 9; je descend depuis 9, pris dans la première bande, jusques vis-à-vis de 6 pris dans la première colonne; le nombre sur lequel je m'arrête est 54, par conséquent 6 fois 9 font 54.

En voilà autant qu'il en faut pour passer à la multiplication des nombres exprimés par plusieurs chiffres.

De la Multiplication par un nombre d'un seul chiffre.

5o. Ecrivez le multiplicateur, qu'on suppose ici d'un seul chiffre, sous le multiplicande, peu importe sous quel chiffre; mais pour fixer les idées, supposons que ce soit sous le chiffre des unités.

Multipliez, d'abord, le nombre des unités, par votre multiplicateur; et si le produit ne contient que des unités, écrivez ce produit au-dessous; s'il contient des unités et des dixaines, écrivez seulement les unités, et comptant les dixaines pour autant d'unités, retenez celles-ci.

Multipliez, de même, le nombre des dixaines du multiplicande, et au produit ajoutez les unités que vous avez retenues; écrivez le tout au-dessous, s'il peut être marqué par un seul chiffre; sinon, n'écrivez que les unités de ce produit, et retenez-en les dixaines qui sont des centaines, pour les ajouter au produit suivant qu'il sera pareillement des centaines.

Continuez de multiplier successivement, suivant la même règle, tous les chiffres du multiplicande; la suite des chiffres que vous aurez écrits marquera le produit.

EXEMPLE.

On demande combien 2864 toises, valent de pieds. La toise est de 6 pieds. La question se réduit à prendre 6 pieds, 2864 fois, ou ce qui revient au même (44) à prendre 2864 pieds, 6 fois.

J'écris donc..... 2864 multiplicande.
6 multiplicateur.

17184.... produit.

Et je dis, en commençant par les unités, 6 fois 4 sont 24; j'écris 4, et je retiens 2 unités pour les deux dixaines.

2°. 6 fois 6 font 36; et deux que j'ai retenues font 38; je pose 8 et je retiens 3.

3°. 6 fois 8 font 48, et 3 que j'ai retenues font 51 ; je pose 1 et je retiens 5.

4°. 6 fois 2 font 12, et 5 que j'ai retenues font 17 que j'écris en entier, parce qu'il n'y a plus rien à multiplier. Le nombre 17184 est le produit demandé, ou le nombre de pieds que valent les 2864 toises, puisqu'il renferme 6 fois les 4 unités, 6 fois les 6 dixaines, 6 fois les 8 centaines, et 6 fois les 2 mille, et par conséquent 6 fois le nombre 2864.

De la Multiplication par un nombre de plusieurs chiffres.

51. Lorsque le multiplicateur a plusieurs chiffres, il faut faire successivement avec chacun de ces chiffres, ce que l'on vient de prescrire lorsqu'il n'y en a qu'un, mais en commençant toujours par la droite : ainsi on multipliera d'abord tous les chiffres du multiplicande, par le chiffre des unités du multiplicateur, puis par celui des dixaines, et on écrira ce second produit sous le premier ; mais comme il doit être un nombre de dixaines, puisque c'est par des dixaines qu'on multiplie, on portera le premier chiffre de ce produit sous les dixaines, et les autres chiffres toujours en avançant sur la gauche.

Le troisième produit qui se fera en multipliant par les centaines, se placera de même sous le second, mais en avançant encore d'une place : on suivra la même loi pour les autres.

Toutes ces multiplications étant faites, on ajoutera les produits particuliers qu'elles ont donnés, et la somme sera le produit total.

EXEMPLE.

On propose de multiplier 65487
par 6958

523896
327435
589383
392922
455658546 produit.

Je multiplie d'abord 65487, par le nombre 8 des unités du multiplicateur, et j'écris successivement sous la barre, les chiffres du produit 523896 que je trouve en suivant la règle donnée pour le premier cas (50).

Je multiplie de même, le nombre 65487 par le second chiffre 5 du multiplicateur, et j'écris le produit 327435 sous le premier produit, mais en plaçant le premier chiffre 5 sous les dixaines de ce premier produit.

Multipliant pareillement 65487 par le troisième chiffre 9, j'écris le produit 589383 sous le précédent, mais en plaçant le premier chiffre 3 au rang des centaines, parce que le nombre par lequel je multiplie est un nombre de centaines.

Enfin je multiplie 65487, par le dernier chiffre 6 du multiplicateur, et j'écris le produit 392922, sous le précédent, en avançant encore d'une place, afin que son premier chiffre occupe la place des mille, parce que le chiffre par lequel on multiplie marque des mille : enfin j'ajoute tous ces produits, et j'ai 455658546 ; pour le produit de 65487 multiplié par 6958, c'est-à-dire, pour la valeur de 65487 pris 6958 fois. En effet, on a pris 65487, 8 fois par la première opération, 50 fois par la seconde ; 900 fois par la troisième, et 6000 fois par la quatrième.

52. Si le multiplicande ou le multiplicateur ou tous les deux, étoient terminés par des zéros, on abrégeroit l'opération, en multipliant comme si ces zéros n'y étoient point ; mais on les mettroit ensuite, tous, à la suite du produit.

EXEMPLE.

On propose de multiplier 6500
par..... 350

325
195

2275000

Je multiplie seulement 65 par 35, et je trouve 2275, à côté duquel j'écris les trois zéros qui se trouvent, en tout, à la suite du multiplicande et du multiplicateur. En effet, le multiplicande 6500, représente 65 centaines; ainsi quand on multiplie 65, on doit sous-entendre que le produit est des centaines. Pareillement le multi-

plicateur 350, marque 35 dixaines; ainsi quand on multiplie par 35, on doit sous-entendre que le produit sera des dixaines; il sera donc des dixaines de centaines, c'est-à-dire, des mille; il doit donc avoir 3 zéros : on appliquera un raisonnement semblable à tous les autres cas.

53. Lorsqu'il se trouve des zéros entre les chiffres du multiplicateur, comme la multiplication par ces zéros ne donneroit que des zéros, on se dispensera d'écrire ceux-ci dans le produit; et passant tout de suite à la multiplication par le premier chiffre significatif qui vient après ces zéros, on en avancera le produit sur la gauche d'autant de places plus une qu'il y a de zéros qui suivent dans le multiplicateur; c'est-à-dire de deux places s'il y a un zéros, de trois s'il y en a deux.

EXEMPLE.

Si l'on a..... 42052
à multiplier par 3006

252312
126156

126408312

Après avoir multiplié par 6, et écrit le produit 252312, on multipliera tout de suite par 3, mais on écrira le produit 126156, de manière qu'il marque des mille; il faudra donc le reculer de trois places, c'est-à-dire, d'une place de plus, qu'il n'y a de zéros interposés aux chiffres du multiplicateur.

De la Multiplication des Parties décimales.

54. Pour multiplier les parties décimales, on observera la même règle que pour les nombres entiers, sans faire aucune attention à la virgule; mais après avoir trouvé le produit, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y a de décimales, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur.

EXEMPLE I.

On propose de multiplier	54,23
par	8,3
	16269
	43384
	450,109

Je multiplierai 5423, par 83; le produit sera 450109; et comme il y a 2 décimales dans le multiplicande, et une dans le multiplicateur, je séparerai trois chiffres sur la droite de ce produit, qui par-là deviendra 450,109, tel qu'il doit être.

La raison de cette règle est facile à saisir, en observant que si le multiplicateur étoit 83, le produit n'auroit eu en décimales que des *centièmes*, puisqu'on auroit répété 83 fois le multiplicande 54,23, dont les décimales sont des centièmes; mais comme le multiplicateur est 8,3; c'est-à-dire, (21) dix fois plus petit que 83, le produit doit donc être dix fois plus petit que dans ce premier cas; le dernier chiffre de ses décimales doit donc (23) être des *millièmes;* il doit donc y avoir trois chiffres décimaux dans ce produit; c'est-à-dire, autant qu'il y en a, tant dans le multiplicande, que dans le multiplicateur.

On peut appliquer un raisonnement semblable à tout autre cas.

EXEMPLE II.

Si on avoit	0,12
à multiplier par	0,3
	0,036

On multiplieroit 12 par 3, ce qui donneroit 36; comme la règle prescrit de séparer ici trois chiffres, on pourroit être embarrassé à y satisfaire; mais si on reprend le raisonnement que nous avons appliqué à l'exemple précédent, on verra facilement qu'il faut, comme on le voit ici, interposer un zéro entre 36 et la virgule. En effet, si on avoit 0,12 à

multiplier par 3, il est évident qu'on auroit 0,36; mais comme on n'a à multiplier que par 0,3, c'est-à-dire, par un nombre dix fois plus petit que 3, on doit avoir un produit dix fois plus petit que 0,36, c'est-à-dire, des millièmes, et c'est ce qui a lieu (28) lorsqu'on écrit 0,036.

55. Comme on n'emploie ordinairement les décimales que dans la vue de faciliter les calculs, en substituant à un calcul rigoureux, une approximation suffisante, mais prompte; il n'est pas inutile d'exposer ici un moyen d'abréger l'opération lorsqu'on n'a besoin d'avoir le produit que jusqu'à un degré d'exactitude proposé.

Supposons, par exemple, qu'ayant à multiplier. . . . . 45,625957 par 28,635, je n'aie besoin d'avoir le produit qu'à moins d'un millieme près. J'écris ces deux nombres comme on le voit ci-dessous, c'est-à-dire, qu'après avoir renversé l'ordre des chiffres de l'un des deux, je l'écris sous l'autre, en faisant répondre le chiffre de ses unités sous la décimale immédiatement, inférieure de deux degrés à celui auquel je veux borner mon produit. Je fais ensuite la multiplication, en négligeant, dans le multiplicande, tous les chiffres qui se trouvent à la droite de celui par lequel je multiplie; et à mesure que je change de chiffre dans le multiplicateur, je porte toujours le premier chiffre du nouveau produit, sous le premier chiffre du premier. L'addition de tous ces produits étant faite, je supprime les deux derniers chiffres, en observant cependant d'augmenter le dernier de ceux qui restent, d'une unité si les deux que je supprime passent 50; après quoi je place la virgule au rang fixé par l'espece de décimales que je me proposois d'avoir.

EXEMPLE.

Je veux multiplier . . . 45,625957
par 28,635
mais je n'ai besoin d'avoir le produit qu'à un millieme d'unité près.
J'écris ainsi ces deux nombres. 45,625957
35682

91251914
36500760
2737554
136875
22810

1306499 ~~78~~
produit. 1306,499

Et si l'on avoit fait la multiplication à l'ordinaire, on auroit eu 1306,499278695, qui s'accorde avec le précédent jusqu'à la troisieme décimale, ainsi qu'on le demande.

S'il n'y avoit pas assez de chiffres décimaux dans le multiplicande, pour faire correspondre le chiffre des unités du multiplicateur, au chiffre auquel la règle prescrit de le faire correspondre, on y suppléeroit en mettant des zéros.

EXEMPLE.

On doit multiplier. 54,236
par. 532,27
et l'on veut avoir le produit à un centieme d'unités près; j'écris. 54,236000
72235

271180000
16270800
1084720
108472
37961

2886819 ~~54~~

produit. . . . . 28868,20 ; en ajoutant une unité au dernier chiffre, parce que les deux que l'on supprime, passent 50.

Pour troisieme exemple, supposons qu'on ait à. . . . . multiplier 0,227538917 1
par. . . . 0,5664170
et l'on ne veut avoir que 7 décimales au produit ; on écrira. . . 0,227538917
87146650

. . . . . .
113769455
13652334
1365228
91012
2275
1589
176
12888206 9

produit. . . . 0,1288821

Sur quelques usages de la Multiplication.

56. Nous ne nous proposons pas de faire connoître tous les usages qu'on peut faire de la multiplication. Nous en indiquerons seulement quelques-uns qui mettront sur la voie pour les autres.

La multiplication sert à trouver, en général, la valeur totale de plusieurs unités, lorsqu'on connoît la valeur de chacune.

Par exemple, 1°. combien doivent coûter 5842 toises, à raison de 54ᴴ la toise ? il faut multiplier 54ᴴ par 5842, ou (44) 5842ᴴ par 54 ; on aura 315468ᴴ pour le prix total demandé. 2°. Combien 5954 pieds cubes * d'eau pèsent-ils, en supposant que le pied-cube pèse 72 liv. ? Il faut multiplier 72℔ par 5954 ou 5954℔ par 72 ; on aura 428688℔ pour le poids des 5954 pieds-cubes.

57. On emploie la multiplication pour convertir des unités d'une certaine espèce, en unités d'une

* Le pied-cube est une mesure d'un pied de long sur un pied de large, et sur un pied de haut, avec laquelle on évalue la capacité des corps, ainsi qu'on le verra en Géométrie.

espèce plus petite. Par exemple, pour réduire les livres en sous, et ceux-ci en deniers; les toises en pieds, ceux-ci en pouces, ces derniers en lignes; les jours en heures, celles-ci en minutes, ces dernières en secondes; on a souvent besoin de ces sortes de conversions. Nous en donnerons quelques exemples.

Si on demande de convertir 8ᴴ 17ˢ 6ᵈ en deniers; comme la livre vaut 20 sous, on multipliera les 8ᴴ livres par 20 (52), ce qui donnera 160 sous, auxquels joignant les 17 sous, on aura 177 sous, qu'on multipliera par 12, parce que chaque sou vaut 12 den. et on aura 2124 den. lesquels joints aux 7 deniers, donnent 2131 deniers pour la valeur de 8ᴴ 17ˢ 7ᵈ convertis en deniers.

Si on demande combien une année commune, ou 365 jours, 5 heures, 48 minutes, ou 365ʲ 5ʰ 48′, valent de minutes? comme le jour est de 24 heures, on multipliera 24ʰ par 365, et au produit 8760ʰ on ajoutera 5ʰ; on multipliera le total 8765, par 60, (52) parce que l'heure contient 60 minutes, et on aura 525900, auxquelles ajoutant 48 minutes, on aura 525948 pour le nombre de minutes contenues dans une année commune.

Cette conversion des parties du temps est utile dans quelques opérations du *Pilotage*.

58. L'abréviation dont nous avons parlé (52) peut être employée pour réduire promptement en livres un certain nombres de *tonneaux;* comme le tonneau de poids pese 2000 livres, si l'on a, par exemple, 854 tonneaux, il n'y a qu'à doubler 854, et mettre les trois zéros à la suite du produit, on aura 1708000 pour le nombre de livres que pesent 854 tonneaux.

Avant de terminer ce qui regarde la multiplication, faisons observer aux commençans, que ces expressions *doubler*, *tripler*, *quadrupler*, etc. signifient la même chose que multiplier par 2, par 3, par 4, etc.

De la division des Nombres entiers et des Parties décimales.

59. *Diviser* un nombre par un autre, c'est, en général, chercher combien de fois le premier de ces deux nombres contient le second.

Le nombre qu'on doit diviser s'appelle *Dividende*, celui par lequel on doit diviser, *Diviseur;* et celui qui marque combien de fois le dividende contient le diviseur, s'appelle *Quotient.*

On n'a pas toujours pour but dans la division de savoir combien de fois un nombre en contient un autre; mais on fait l'opération dans tous les cas, comme si elle tendoit à ce but; c'est pourquoi on peut, dans tous les cas, la considérer comme l'opération par laquelle on trouve combien de fois le dividende contient le diviseur.

Il suit de-là que si on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende; puisque c'est prendre ce diviseur, autant de fois qu'il est dans le dividende : cela est général, soit que le quotient soit un nombre entier, soit qu'il soit un nombre fractionnaire.

Quant à l'espèce des unités du quotient, ce n'est ni par l'espèce de celles du dividende, ni par l'espèce de celles du diviseur, ni par l'une et l'autre qu'il faut en juger; car le dividende et le diviseur restant les mêmes, le quotient qui sera aussi toujours le même numériquement, peut être fort différent pour la nature de ses unités, selon la question qui donne lieu à cette division.

Par exemple, s'il est question de savoir combien 8^{fr} contiennent 4^{fr}, le quotient sera un nombre abstrait qui marquera 2 fois. Mais s'il est question de savoir combien pour 8^{fr}

8^t on fera faire d'ouvrage à raison de 4^fl la toise, le quotient sera 2 toises, qui est un nombre concret, et dont l'espèce n'a aucun rapport avec le dividende ni avec le diviseur.

Mais on voit en même temps, que la question seule qui conduit à faire la division dont il s'agit, décide la nature des unités du quotient.

De la division d'un nombre composé de plusieurs chiffres par un nombre qui n'en a qu'un.

60. L'opération que nous allons décrire, suppose qu'on sache trouver combien de fois un nombre d'un ou deux chiffres, contient un nombre d'un seul chiffre. C'est une connoissance déja acquise, quand on sait de mémoire les produits des nombres qui n'ont qu'un chiffre.

On peut aussi, pour y parvenir, faire usage de la Table que nous avons donnée ci-dessus (48). Par exemple, si je veux savoir combien de fois 74 contient 9, je cherche le diviseur 9 dans la bande supérieure, et je descends verticalement jusqu'à ce que je rencontre le nombre le plus approchant de 74, c'est ici 72; alors le nombre 8 qui se trouve vis-à-vis 72, dans la première colonne, est le nombre de fois, ou le quotient que je cherche.

Cela supposé, voici comment se fait la division d'un nombre qui a plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un.

Ecrivez le diviseur à côté du dividende, séparez l'un de l'autre par un trait, et soulignez le diviseur sous lequel vous écrirez les chiffres du quotient, à mesure que vous les trouverez.

Prenez le premier chiffre sur la gauche du dividende, ou les deux premiers chiffres, si le premier ne contient pas le diviseur.

Cherchez combien ce premier ou ces deux premiers chiffres contiennent le diviseur; écrivez ce nombre de fois sous le diviseur.

Multipliez le diviseur par le quotient que vous venez d'écrire, et portez le produit sous la partie du dividende que vous venez d'employer.

Enfin retranchez le produit, de la partie supérieure du dividende à laquelle il répond, et vous aurez un reste.

A côté de ce reste, abaissez le chiffre suivant du dividende principal ; et vous aurez un second dividende partiel, sur lequel vous opérerez comme sur le premier, plaçant le quotient à droite de celui qu'on a déja trouvé, multipliant de même le diviseur, par ce quotient, écrivant et retranchant le produit comme ci-devant.

Vous abaisserez, de même, à côté du reste de cette division, le chiffre du dividende qui suit celui que vous avez abaissé, et vous continuerez toujours de la même manière jusqu'au dernier inclusivement.

Cette règle va être éclaircie par l'exemple suivant.

EXEMPLE.

On propose de diviser 8769 par 7.

J'écris ces deux nombres, comme on les voit ici :

dividende	7 diviseur
8769	
7	1252 $\frac{5}{7}$ quotient.
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

Et commençant par la gauche du dividende, je devrois dire, en 8 mille, combien de fois 7 ? mais je dis simplement en 8, combien de fois 7 ? il y est une fois. Cet 1 est naturellement mille, mais les chiffres qui viendront après, lui donneront sa véritable valeur ; c'est pourquoi j'écris simplement 1 sous le diviseur.

Je multiplie le diviseur 7 par le quotient 1 ; et je porte le produit 7 sous la partie 8 que je viens de diviser, faisant la soustraction, j'ai pour reste 1.

Ce reste 1, est la partie de 8 qui n'a pas été divisée, et est une dixaine à l'égard du chiffre suivant 7 ; c'est pourquoi j'abaisse ce même chiffre 7 à côté, et je continue l'opération, en disant en 17, combien de fois sept ? 2 fois. J'écris ce 2 à la droite du premier quotient 1 qu'a donné la première opération.

Je multiplie, comme dans la première opération, le diviseur 7 par le quotient 2 que je viens de trouver ; je porte le produit 14 sous mon dividende partiel 17, et faisant la soustraction, il me reste 3 pour la partie qui n'a pu être divisée.

A côté de ce reste 3, j'abaisse 6, troisième chiffre du dividende, et je dis en 36 combien de fois 7 ? 5 fois ; j'écris 5 au quotient.

Je multiplie le diviseur 7 par 5 ; et ayant écrit le produit 35 sous mon nouveau dividende partiel, je le retranche, et il me reste 1.

Enfin, à côté de ce reste 1, j'abaisse le chiffre 9 du dividende, et je dis en 19 combien de fois 7 ? 2 fois ; j'écris 2 au quotient.

Je multiplie le diviseur 7, par ce nouveau quotient 2, et ayant écrit le produit 14 sous mon dernier dividende partiel 19, j'ai pour reste 5.

Je trouve donc que 8769 contiennent 7, autant de fois que le marque le quotient que nous avons écrit, c'est-à-dire, 1252 fois, et qu'il reste 5.

A l'égard de ce reste, nous nous contenterons pour le présent de dire qu'on l'écrit à côté du quotient, comme on le voit dans cet exemple, c'est-à-dire, en écrivant le diviseur au-dessous de ce reste, et séparant l'un de l'autre par un trait ; et alors on prononce *cinq septièmes*. Nous expliquerons par la suite la nature de ces sortes de nombres.

61. Si dans la suite de l'opération, quelqu'un des dividendes partiels se trouvoit ne pas contenir le diviseur, on écriroit zéro au quotient, et omettant la multiplication, on abaisseroit tout de suite un autre chiffre à côté de ce dividende partiel, et on continueroit la division.

EXEMPLE.

Il s'agit de diviser 14464 par 8.

```
14464 | 8
 8    |----
------| 1808
 64
 64
----
 064
  64
 ---
   0
```

Je prends, ici, les deux premiers chiffres du dividende, parce que le premier ne contient pas le diviseur.

Je trouve que 14 contient 8, 1 fois ; j'écris 1 au quotient ; je multiplie 8 par 1, et je retranche le produit 8 de 14, ce qui me donne pour reste 6, à côté duquel j'abaisse le troisième chiffre 4 du dividende.

Je continue en disant : en 64 combien de fois 8 ? huit fois ; j'écris 8 au quotient, et faisant la multiplication, j'ai pour produit 64 que je retranche du dividende partiel 64 ; il me reste o à côté duquel j'abaisse 6, quatrième chiffre du dividende : et comme 6 ne contient pas huit, j'écris o au quotient, et j'abaisse tout de suite, à côté de 6, le dernier chiffre du dividende qui est ici 4, pour dire en 64 combien de fois 8 ? il y est 8 fois : après avoir écrit 8 au quotient, je fais la multiplication, et je retranche le produit 64 ; et comme il ne reste rien, j'en conclus que 14464, contiennent 8, 1808 fois.

De la Division par un nombre de plusieurs chiffres.

62. Lorsque le diviseur aura plusieurs chiffres, on se conduira de la manière suivante.

Prenez sur la gauche du dividende autant de chiffres qu'il est nécessaire pour contenir le diviseur.

Cela posé, au lieu de chercher comme ci-dessus, combien la partie du dividende que vous avez prise, contient votre diviseur entier, cherchez seulement combien de fois le premier chiffre de votre diviseur est compris dans le premier chiffre de votre

dividende, ou dans les deux premiers, si le premier ne suffit pas ; marquez ce quotient sous le diviseur comme ci-devant.

Multipliez successivement, selon la règle donnée (50), tous les chiffres de votre diviseur, par ce quotient, et portez à mesure, les chiffres du produit, sous les chiffres correspondants de votre dividende partiel. Faites la soustraction, et à côté du reste abaissez le chiffre suivant du dividende, pour continuer l'opération de la même maniere.

Nous allons éclaircir ceci par quelques exemples, et prévenir en même-temps, les cas qui peuvent causer quelqu'embarras.

EXEMPLE I.

On propose de diviser 75347 par 53.

75347	53
53	1421 $\frac{34}{53}$
223	
212	
114	
106	
87	
53	
34	

Je prends seulement les deux premiers chiffres du dividende, parce qu'ils contiennent le diviseur, et au lieu de dire en 75 combien de fois 53, je cherche seulement combien les 7 dixaines de 75 contiennent les 5 dixaines de 53, c'est-à-dire, combien 7 contient 5 ; je trouve une fois que j'écris au quotient.

Je multiplie 53 par 1, et je porte le produit 53 sous 75 : la soustraction faite, il reste 22, à côté duquel j'abaisse le chiffre 3 du dividende, et je poursuis, en disant, pour plus de facilité, en 22 combien de fois 5, (au lieu de dire en 223 combien de fois 53 ; je trouve 4 fois, que j'écris au quotient.

Je multiplie successivement par 4, les deux chiffres du diviseur, et je porte le produit 212 sous mon dividende partiel 223; la soustraction faite, j'ai pour reste 11; j'abaisse à côté de ce reste, le chiffre 4 du dividende, et je dis simplement comme ci-dessus, en 11 combien de fois 5 ? 2 fois; je l'écris au quotient, et je multiplie 53 par 2 ce qui me donne 106 que j'écris sous le dividende partiel 114; faisant la soustraction, j'ai pour reste 8 à côté duquel j'abaisse le dernier chiffre; je divise de même 87 et continuant comme ci-dessus, je trouve 1 pour quotient, et 34 pour reste que j'écris à côté du quotient, de la manière qui a été indiquée plus haut (59).

63. On devroit, à la rigueur, chercher combien de fois chaque dividende partiel contient le diviseur entier; mais comme cette recherche seroit souvent longue et pénible, on se contente, comme on vient de le voir, de chercher combien la partie la plus forte de ce dividende contient la partie la plus forte du diviseur. Le quotient qu'on trouve par cette voie, n'est pas toujours le véritable, parce qu'en prenant ce parti, on ne fait réellement qu'une estimation approchée; mais outre que cette estimation met presque toujours sur le but, et que dans les cas où elle n'y met pas, elle en écarte peu; la multiplication qui vient ensuite, sert à redresser ce qu'il peut y avoir de défectueux dans ce jugement. En effet, si le dividende partiel contenoit réellement le diviseur, trois fois par exemple; et que par l'essai qu'on fait, on eût trouvé qu'il le contient 4 fois, il est facile de voir qu'en faisant la multiplication par 4, on auroit un produit plus grand que le dividende, puisqu'on prendroit le diviseur plus de fois qu'il n'est réellement dans ce dividende, et par conséquent la soustraction deviendra impossible; alors on diminuera le quotient successivement d'une, deux, etc. unités, jusqu'à ce qu'on trouve un produit qu'on puisse retrancher : au contraire, si on n'avoit mis que 2 au quotient, le reste de la sous-

traction se trouveroit plus grand que le diviseur; ce qui prouveroit que le diviseur y est encore contenu, et que par conséquent le quotient est trop foible.

Au reste, on acquiert en peu de temps l'usage de prévoir de combien on doit diminuer ou augmenter le quotient que donne la première épreuve.

EXEMPLE II.

On propose de diviser 189492 par 375.

189492	375
1875	$505\frac{117}{375}$
1992	
1875	
117	

Je prends les quatre premiers chiffres du dividende, parce que les trois premiers ne contiennent pas le diviseur.

Je dis ensuite, en 18 seulement, combien de fois 3 ? il y est réellement 6 fois ; mais en multipliant 375 par 6, j'aurois plus que mon dividende 1894 ; c'est pourquoi j'écris seulement 5 au quotient. Je multiplie 375 par 5 ; et après avoir écrit le produit sous 1894, je fais la soustraction, et j'ai pour reste 19.

J'abaisse à côté de 19, le chiffre 9 du dividende ; et comme 199 que j'ai alors, ne contient pas 375, je pose 0 au quotient, et j'abaisse à côté de 199, le chiffre 2 du dividende, ce qui me donne 1992, pour lequel je dis en 19 seulement combien de fois 3 ? 6 fois. Mais par la même raison que ci-dessus, je n'écris au quotient, que 5 ; et après avoir opéré comme ci-devant, j'ai pour reste 117.

64. Voici une réflexion qui peut servir à éviter dans un grand nombre de cas, les tentatives inutiles. On est principalement exposé à ces essais douteux, lorsque le second chiffre du diviseur est sensiblement plus grand que le premier. Dans ce cas, au lieu de chercher combien le premier chiffre du diviseur est contenu dans

la partie correspondante du dividende, il faut chercher combien ce premier chiffre augmenté d'une unité, se trouve contenu dans la partie correspondante du dividende; cette épreuve sera toujours beaucoup plus approchante que la premiere.

EXEMPLE.

On propose de diviser 1832 par 288.

	288
1832	$6\frac{104}{288}$
1728	
104	

Au lieu de dire en 18 combien de fois 2; je dirai en 18 combien de fois 3, parce que le diviseur 288 approche beaucoup plus de 300 que de 200, je trouve 6 qui est le véritable quotient, au lieu que j'aurois trouvé 9, et j'aurois par conséquent été obligé de faire trois essais inutiles.

Moyens d'abréger la Méthode précédente.

65. C'est pour rendre la méthode plus facile à saisir, que nous avons prescrit d'écrire sous chaque dividende partiel, le produit qu'on trouve en multipliant le diviseur par le quotient; mais comme le but de l'Arithmétique doit être d'abréger les opérations, nous croyons devoir faire remarquer qu'on peut se dispenser d'écrire ces produits, et faire la soustration à mesure qu'on a multiplié chaque chiffre du diviseur. L'exemple suivant suffira pour faire entendre comment se fait cette soustraction.

EXEMPLE.

On veut diviser 756984 par 932.

756984	932
1138	812
2064	
200	

Après avoir pris les quatre premiers chiffres du dividende, qui sont nécessaires pour contenir le diviseur, je trouve que 75 contient 9, 8 fois; c'est pourquoi j'écris 8 au quotient; mais au lieu de porter sous 7569 le produit de 932 par 8, je multiplie d'abord deux par 8, ce qui me donne 16; mais comme je ne puis ôter 16 de 9, j'emprunte sur le chiffre suivant 6 une dixaine, qui jointe à 9 me donne 19, duquel ôtant 16, il me reste 3 que j'écris au-dessous.

Pour tenir compte de cette dixaine empruntée, au lieu de diminuer d'une unité le chiffre 6 sur lequel j'ai emprunté, je retiens cette unité que je vais ajouter au produit suivant; ainsi continuant la multiplication, je dis 8 fois 3 font 24, et 1 que j'ai retenu font 25; comme je ne puis ôter 25 de 6, j'emprunte sur le chiffre suivant 5 du dividende, deux dixaines, qui jointes à 6 me donnent 26, desquelles j'ôte 25, et il me reste 1 que j'écris sous 6; par-là, j'ai tenu compte de la première dixaine dont j'aurois dû diminuer 6, parce que j'ai retranché une dixaine de plus. Je tiendrai de même compte des deux dixaines que je viens d'emprunter, je continue donc, en disant 8 fois 9 font 72, et 2 que j'ai empruntés font 74, lesquels ôtés de 75, il reste 1.

J'abaisse à côté du reste 113, le chiffre 8 du dividende, et je continue de la même manière en disant en 11 combien de fois 9 ? 1 fois; puis une fois 2, fait 2, qui ôtés de 8, il reste 6; 1 fois 3 fait 3, qui ôtés de 3, il reste 0; 1 fois 9 est 9, qui ôtés de 11, il reste 2. J'abaisse le chiffre 4 à côté du reste 206, et je dis en 20 combien de fois 9 ? 2 fois; et faisant la multiplication, 2 fois 2 font 4, qui ôtés de 4, il reste 0; 2 fois 3 font 6, qui ôtés de 6, il reste 0; et enfin 2 fois 9 font 18, qui ôtés de 20, il reste 2.

66. Il peut arriver dans le cours de ces divisions partielles, que le dividende contienne le diviseur plus de 9 fois; cependant on ne doit jamais mettre plus de 9 au quotient; car si on pouvoit seulement mettre 10, ce seroit une preuve que le quotient trouvé par l'opération précédente, seroit faux, puisque la dixaine qu'on trouveroit dans le quotient actuel appartiendroit à ce premier quotient.

67. Si le dividende et le diviseur étoient suivis de zéros, on pourroit en ôter à l'un et à l'autre autant qu'il y en a à la suite de celui qui en a le moins.

Par exemple, pour diviser 8000 par 400, je diviserai seulement 80 par 4; car il est évident que 80 centaines ne contiennent pas plus 4 centaines, que 80 unités ne contiennent 4 unités.

De la Division des Parties décimales.

68. Pour ne point nous arrêter à des distinctions superflues, nous réduirons l'opération de la division des décimales à cette seule règle.

Mettez à la suite de celui des deux nombres proposés, qui a le moins de décimales, un nombre de zéros suffisant pour que le nombre des décimales soit le même dans chacun; cela ne changera rien à la valeur de ce nombre (30); supprimez la virgule dans l'un et dans l'autre, et faites l'opération comme pour les nombres entiers; il n'y aura rien à changer au quotient que vous trouverez.

EXEMPLE.

On propose de diviser 12,52 par 4,3,

J'écris..... 12,52 | 4,3

Ou plutôt 12,52 | 4,30

en complétant le nombre des décimales.

Supprimant la virgule, j'ai 1252 à diviser par 430;

faisant l'opération ..... 1252 | 430

$2\frac{392}{430}$

392

Je trouve 2 pour quotient, et 392 pour reste, c'est-à-dire que le quotient est 2 et $\frac{392}{430}$.

Mais comme l'objet qu'on se propose quand on se sert de décimales, est d'éviter les fractions ordinaires; au lieu d'écrire le reste sous la forme de fraction, comme on l'a pratiqué jusqu'ici, on continuera l'opération comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE.

1252 | 430

2,9116

3920

500

700

2700

120

Après avoir trouvé le quotient, en entiers, qui est ici 2, on mettra à côté du reste 392, un zéro qui, à la vérité rendra ce reste dix fois trop grand; on continuera de diviser par 430, et ayant trouvé qu'il faudroit mettre 9 au quotient, on l'y mettra en effet, mais après avoir marqué la place des unités entières, en mettant une virgule après le 2; par ce moyen le 9 ne marquera plus que des dixièmes : après la multiplication et la soustraction faites, on mettra à côté du reste 50, un zéro, ce qui est

la même chose que si on en avoit mis d'abord deux, à côté du dividende ; mais en mettant après 9, le quotient 1 qu'on trouvera, on lui donnera par-là sa véritable valeur, puisqu'alors il marque des centièmes ; on continuera ainsi tant qu'on le jugera nécessaire. En s'en tenant à deux décimales, on a la valeur du quotient à moins d'un centième d'unité près ; en poussant jusqu'à trois chiffres, on a le quotient à moins d'un millième près ; et ainsi de suite ; puisqu'on n'auroit pas pu mettre une unité de plus ou de moins, sans rendre le quotient trop fort ou trop foible.

Tous les restes de division peuvent être réduits ainsi en décimales.

Il reste à expliquer pourquoi la suppression de la virgule dans le dividende et dans le diviseur, ne change rien au quotient, lorsqu'on a rendu le nombre des décimales le même dans chacun de ces deux nombres : c'est ce qu'il est aisé d'appercevoir, parce que dans l'exemple ci-dessus, le dividende 12,52, et le diviseur 4,30 ne sont autre chose que 1252 centièmes et 430 centièmes, puisque les unités entières valent des centaines de centièmes (22) ; or il est clair que 1252 centièmes ne contiennent pas autrement 430 centièmes, que 1252 unités ne contiennent 430 unités ; donc la considération de la virgule est inutile quand on a completé le nombre des décimales.

69. Lorsqu'on n'a besoin de connoître le quotient d'une division, que jusqu'à un degré d'exactitude proposé, on peut abréger le calcul, par la méthode suivante. Nous supposerons, d'abord, qu'on n'a besoin de connoître ce quotient, qu'à une unité près : nous ferons voir ensuite, comment on doit appliquer la méthode pour l'avoir aussi près qu'on voudra : voici la regle.

Supprimez, sur la droite du dividende, autant de chiffres, moins un, qu'il y en a dans le divi-

seur : faites, ensuite, la division, comme à l'ordinaire : s'il n'y a point de reste, vous mettrez à la suite du quotient, autant de zéros, que vous avez supprimé de chiffres dans le dividende. Mais s'il y a un reste, vous continuerez de diviser, non pas par le même diviseur qu'auparavant, ce qui n'est plus possible, mais par ce diviseur dont vous aurez supprimé le dernier chiffre de la droite : après cette division vous diviserez le nouveau reste, par le diviseur précédent, dont vous supprimerez le dernier chiffre sur la droite : et vous continuerez, ainsi, de diviser, en supprimant à chaque division, un chiffre sur la droite du diviseur.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 8789236487 divisé par 64423. Je supprime les quatre derniers chiffres de la droite du dividende, et je divise 878923, par le diviseur proposé 64423.

878923		64423
234693		136430
41424		6442
2772	. .	644
196	. .	64
4	. .	6

Je trouve, d'abord, 13 pour quotient, et 41424 pour reste : je divise donc les 41424, par 6442, en supprimant le dernier chiffre 3 du diviseur : j'ai pour quotient 6, que j'écris à la suite du premier quotient 13 ; et le reste est 2772 que je divise par 644, en supprimant encore un chiffre sur la droite du diviseur primitif ; j'ai pour quotient 4, que j'écris à la suite du quotient principal 136 ; le reste est 196 que je divise

par 64, en supprimant encore un chiffre dans le diviseur : le quotient est 3, et le reste, 4. Enfin, je divise par 6, et j'ai 0 pour quotient ; en sorte que le quotient de 87892364 87 divisé par 64423, est 136430, à moins d'une unité près. En effet, le quotient exact est..... $136430\frac{6527}{64423}$.

Il n'est pas indispensable d'écrire, à chaque fois, comme nous l'avons fait, le nouveau diviseur ; on peut se contenter de barrer, dans le diviseur primitif, chaque chiffre à mesure qu'on passe à une nouvelle division : ce n'a été que pour rendre l'opération plus sensible, que nous avons écrit ces diviseurs à côté des restes successifs.

70. Si le reste de la premiere division se trouvoit plus petit que n'est le diviseur après qu'on a supprimé le dernier chiffre, on mettroit zéro au quotient ; et s'il se trouvoit encore plus petit que ne seroit ce diviseur après qu'on en a encore ôté le dernier des chiffres restans, on mettroit encore un zéro au quotient, et ainsi de suite.

EXEMPLE.

Pour avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 55106054 divisé par 643 ; je divise comme à l'ordinaire, la partie 551060 qui reste après la suppression des deux derniers chiffres du dividende proposé.

551060	643
3666	85701
4510 . .	64
009 . .	6
9 .	
9 .	
3	

J'ai pour quotient 857, et 9 pour reste ; il faut donc diviser ce reste, par 64 seulement ;

comme 9 ne contient pas ce diviseur, je mets 0 au quotient, et j'ai encore pour reste, 9, que je divise par 6 seulement, en sorte que le quotient cherché, est 85701, à moins d'une unité près.

71. Si lorsqu'au commencement de l'opération on supprime sur la droite du dividende, les chiffres que la regle prescrit de supprimer, il se trouve que les chiffres restans ne contiennent pas le diviseur, on supprimera tout de suite, sur la droite du diviseur, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour que le diviseur y soit contenu.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 1611527 divisé par 64524.

Je supprime les quatre chiffres 1527 de la droite du dividende. Mais comme les chiffres restans 161 ne peuvent pas être divisés par 64524, je supprime dans ce diviseur, les trois derniers chiffres 524 qui doivent être supprimés pour que ce diviseur soit contenu dans le dividende restant 161; ainsi je divise 161 par 64, en opérant comme dans l'exemple précédent.

	64
161	25
33 . . .	6
3	

et j'ai 25 pour le quotient de 1611527 divisé par 64524, à moins d'une unité près : en effet, le quotient exact est $24\ \frac{6291}{64524}$ qui est beaucoup plus près de 25 que de 24.

72. A mesure qu'on supprime un chiffre dans le diviseur, il convient, pour plus d'exactitude, d'augmenter d'une unité, le dernier de ceux qui restent, si celui qu'on supprime, est au dessus de 5 ou égal à 5. On augmentera de même, d'une unité le dernier des chiffres qui

restent dans le dividende, après la suppression que la regle prescrit si ceux-ci surpassent ou 5, ou 50, ou 500, selon qu'il y en a 1 ou 2, ou 3, etc.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 8657627 divisé par 1987.

Je divise donc 8658 par 1987, comme il suit.

	1987
8658	4357
710 . .	199
113 . .	20
13 . .	2

C'est-à-dire, qu'au lieu de diviser le reste 710 par 198 seulement, je le divise par 199, parce que le dernier chiffre 7, que je supprime, est au-dessus de 5. Même raison pour la division suivante. Mais comme le dernier diviseur qui est est contenu 6 fois $\frac{1}{2}$ dans 13 est un peu trop fort, je mets 7 au quotient, pour compenser.

73. Maintenant il est facile de voir ce qu'il y a à faire, lorsqu'on veut avoir le quotient beaucoup plus exactement. Par exemple, si l'on vouloit avoir le quotient, à un dix-millieme d'unité près, la question se réduiroit à mettre autant de zéros (ici, ce seroit quatre) à la suite du dividende, qu'on veut avoir de décimales au quotient; après quoi, on fera la division, selon la méthode actuelle. Et lorsqu'on aura trouvé le quotient, à moins d'une unité près, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres, qu'on vouloit avoir de décimales.

EXEMPLE.

EXEMPLE.

On veut avoir, à moins d'un dix-millieme d'unité près, le quotient de 6927 divisé par 4532; je mets quatre zéros, à la suite de 6927, et la question se réduit à avoir, à moins d'une unité près, le quotient de 69270000 divisé par 4532, c'est-à-dire, conformément à la regle ci-dessus, à diviser 69270 par 4532, comme il suit,

69270	4532
23950	15285
1290 . .	453
384 . .	45
24 . .	5

le quotient cherché est donc, 1,5285, à moins d'un dix-millieme d'unité près.

S'il y avoit des décimales dans le dividende, ou dans le diviseur, ou dans tous les deux, on les rameneroit d'abord à n'en point avoir, selon ce qui a été dit (68), après quoi on opéreroit comme dans ce dernier exemple.

Donc si l'on vouloit réduire une fraction proposée en décimales, on y parviendroit promptement par cette méthode, ayant égard à ce qui a été dit (71).

Ainsi si l'on veut réduire $\frac{4253}{9678}$ en décimales, et en avoir la valeur à moins d'un millième d'unité près, on aura 4253000 à diviser par 9678; ce qui (69) se réduira à diviser 4253, par 6978; ou (71) à diviser 4253 par 968, selon la méthode actuelle. On trouvera donc 439 : en sorte qu'on aura 0,439 pour la valeur de $\frac{4251}{9678}$, à moins d'un millième près.

74. Il pourroit arriver néanmoins que le quotient trouvé d'après ces regles fût fautif de 1, 2,

ou trois unités dans le dernier chiffre. Quoique ce cas doive se rencontrer très-rarement, il n'est pas inutile de faire observer qu'on peut toujours le prévenir facilement, en ne séparant, au commencement de l'opération, sur la droite du dividende, qu'autant de chiffres moins deux qu'il y en a dans le diviseur, et opérant, du reste, comme ci-dessus. Lorsque le quotient sera trouvé, on en supprimera le dernier chiffre, en observant d'ajouter une unité au dernier de ceux qui resteront, si celui qu'on supprime est plus grand que 5.

De la preuve de la Multiplication et de la division.

75. On peut tirer de la définition même que nous avons donnée de chacune de ces deux opérations, le moyen d'en faire la preuve.

Puisque, dans la multiplication, on prend le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités, il s'ensuit que si on cherche combien de fois le produit contient le multiplicande, c'est-à-dire (59), si on divise le produit par le multiplicande, on doit trouver pour quotient le multiplicateur; et comme on peut prendre le multiplicande pour le multiplicateur, et *vice versâ*; en général, *si on divise le produit d'une multiplication, par l'un de ses facteurs, on doit trouver pour quotient l'autre facteur.*

Par exemple, ayant trouvé ci-dessus (50) que 2864 multiplié par 6 a donné 17184, je divise 17184 par 2864, je dois trouver et je trouve en effet 6 pour quotient.

Pareillement, puisque le quotient d'une division marque combien de fois le dividende con-

tient le diviseur, il s'ensuit que si on prend le diviseur autant de fois qu'il est marqué par le quotient, c'est-à-dire, si on multiplie le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende lorsque la division a été faite sans reste; et que dans le cas où il y a un reste, si on multiplie le diviseur par le quotient, et qu'au produit on ajoute le reste de la division, on doit reproduire le dividende.

Par exemple, nous avons trouvé ci-dessus (62) que 189492 divisé par 375, donnoit 505 pour quotient et 117 pour reste, en multipliant 375 par 505, on trouve 189375; auquel ajoutant le reste 117, on retrouve le dividende 189492.

Ainsi la multiplication et la division peuvent se servir de preuve réciproquement.

Mais on peut vérifier ces opérations par un moyen plus prompt que nous allons exposer : il ne faut pas, pour cela, négliger les réflexions que nous venons de faire : elles seront utiles dans beaucoup d'autres occasions.

Preuve par 9.

76. Supposons qu'après avoir multiplié 65498 par 454, et trouvé que le produit est 29736092, on veuille éprouver si ce produit est exact.

On ajoutera tous les chiffres 6, 5, 4, 9, 8, du multiplicande, comme s'ils ne contenoient que des unités simples, et on retranchera 9 à mesure qu'il se trouvera dans la somme; on aura un reste qui en sera ici 5.

On ajoutera pareillement les chiffres 4, 5, 4, du multiplicateur, et retranchant pareillement tous les 9 que produit cette addition, on aura pour reste 4.

On multipliera le reste 5 du multiplicande par

le reste 4 du multiplicateur, et du produit 20, on retranchera les 9 qu'il peut renfermer ; il restera 2.

Si le produit est exact, il faut qu'ajoutant de même tous les chiffres 2, 9, 7, 3, 6, 0, 9, 2, de ce produit, et retranchant tous les 9, il ne reste aussi que 2, ce qui a lieu en effet.

Cette regle est fondée sur ce principe, que pour avoir le reste de la soustraction de tous les 9 qu'un nombre peut renfermer, il n'y a qu'à chercher le reste que ces chiffres ajoutés comme des unités simples, donneroient après la suppression des 9.

En effet, si d'un nombre exprimé par un seul chiffre suivi de plusieurs zéros, on retranche tous les 9, le reste sera exprimé par ce seul chiffre : si de 4000 ou de 500 ou de 60000 vous retranchez tous les 9, le reste sera 4 ou 5 ou 6, etc. ce qui est aisé à voir.

Donc le reste que donneroit, par la suppression des 9, un nombre tel que 65498, (qui est la même chose que 60000, plus 5000, plus 400 plus 90, plus 8), sera le même que celui que donneroient 6, plus 5, plus 4, plus 9, plus 8 ; c'est-à-dire, le même que si l'on ajoutoit ses chiffres comme contenant des unités simples.

En voici maintenant l'application à la preuve de la multiplication.

Puisque 65498 est composé d'un certain nombre de 9 et d'un reste 5, et que le multiplicateur 454 est composé aussi d'un certain nombre de 9, et d'un reste 4, il ne peut s'en falloir que du produit de 5 par 4 ou 20 que le produit total ne soit divisible par 9 ; ou en ôtant les 9, il ne doit s'en falloir que de 2, que le produit total ne soit divisible par 9 : donc il doit

rester au produit la même quantité que dans le produit des deux restes après la suppression des 9 qu'il renferme.

On pourroit faire aussi cette preuve de la même maniere par le nombre 3.

A l'égard de la division, elle devient facile à éprouver, après ce qui a été dit (70). Après avoir ôté du dividende le reste qu'a donné la division, on regardera le résultat comme un produit dont le diviseur et le quotient sont les facteurs, et par conséquent on y appliquera la preuve par 9 de la même maniere qu'on vient de le faire.

A parler exactement, cette vérification n'est pas infaillible, parce que, dans la multiplication, par exemple, si l'on s'étoit trompé de quelques unités sur quelque chiffre du produit, et qu'en même temps on eût fait une erreur égale, mais en sens contraire, sur quelque autre chiffre du même produit; comme cela ne changeroit rien au reste que l'on auroit après la suppression des 9, cette regle ne feroit point appercevoir l'erreur; mais comme il faut, ainsi qu'on le voit, au moins deux erreurs, et deux erreurs qui se compensent, ou qui ne différent que d'un certain nombre de fois 9, les cas où cette vérification seroit fautive, seront très-rares dans l'usage.

Sur quelques usages de la règle précédente.

77. La division sert, non-seulement à trouver combien de fois un nombre en contient un autre, mais encore à partager un nombre en parties égales. Prendre la moitié, le tiers, le quart, le cinquième, le vingtième, le trentième, etc. d'un nombre; c'est diviser ce nombre par 2, 3, 4, 5, 20, 30, etc. ou le partager en 2, 3, 4, 5, 20, 30, etc. parties égales, pour prendre une de ces parties.

La division sert encore à convertir les unités d'une certaine espèce, en unités d'une espèce supérieure; par exemple, un certain nombre de deniers, en sous, et ceux-ci en livres.

Pour réduire 5864 deniers en sous, on remarquera que puisqu'il faut 12 deniers pour faire un sou, autant de fois il y aura 12 deniers dans 5864 deniers, autant il y aura de sous; il faut donc diviser par 12; on trouvera 488^{s} et 8^{d} de reste. Pour réduire en livres, les 488^{s} on divisera 488 par 20, puisqu'il faut, 20^{s} pour faire la livre, et on aura en total, 24 liv. 8 sous 8 deniers.

A l'occasion de cette division par 20, remarquons que quand on a à diviser par un nombre suivi de zéros, on peut abréger l'opération, en séparant sur la droite du dividende, autant de chiffres qu'il y a de zéros; on divise la partie qui reste à gauche, par les chiffres significatifs du diviseur; s'il y a un reste, on écrit à la suite, les chiffres qu'on a séparés; ce qui donne le reste total.

Par exemple, pour diviser, 5834 par 20; je sépare le chiffre 4, et je divise par 2 la partie 583; j'ai pour quotient 291, et 1 pour reste; j'écris à côté de ce reste 1, le chiffre séparé 4, ce qui me donne 14 pour reste total; en sorte que le quotient est 291 $\frac{14}{20}$.

Cette abréviation peut être appliquée à la réduction de la charge d'un navire en tonneaux de poids : si l'on sait que la charge est de 2584954 livres; pour la réduire en tonneaux, c'est-à-dire, pour diviser par 2000; on séparera les trois derniers chiffres de la droite, et prenant la moitié des autres on aura 1292 tonneaux et 954 livres.

Quand on veut évaluer en livres et sous le vingtieme d'un nombre de livres proposé, il suit de cette regle que l'opération se réduit à compter le dernier chiffre pour des sous, et prendre moitié des autres chiffres que l'on comptera pour livres. Si en prenant cette moitié, il reste une unité, on la comptera pour une dixaine de sous qu'on placera à la gauche du chiffre qu'on a séparé d'abord. Par exemple, si l'on veut avoir le vingtieme de 54672 liv. on séparera le dernier chiffre 2 que l'on

comptera pour 2 sous ; et prenant la moitié de 5467 qui est 2733 avec une unité de reste, on écrira 2733 liv. 12 sous : la raison de cette regle est évidente, en faisant attention que 54672 liv. est 54660 liv. plus 12 liv. ; or le vingtieme de 54660 est évidemment 2733, et celui de 12 liv. est 12 sous, puisque le vingtieme d'une livre est un sou. S'il y avoit des sous et deniers dans la somme proposée, on négligeroit les deniers dont la vingtième partie ne peut jamais faire un denier. A l'égard des sous, on les tripleroit ; et prenant le cinquieme on le porteroit aux deniers. Ainsi le vingtième de 54672 liv. 17 sous 7 deniers, est 2733 liv. 12 sous 10 deniers.

S'il s'agissoit d'avoir le dixieme d'un nombre de livres, on sépareroit le dernier chiffre, et l'ayant doublé, on le compteroit pour des sous ; et on compteroit pour des livres, tous les chiffres restans sur la gauche. Ainsi le dixieme de 67987 liv. est 6798 liv. 14 sous. La raison pour laquelle on double le dernier chiffre, est que le dixieme d'une livre, est 2 sous.

On a assez souvent besoin de prendre les quatre deniers pour livre, d'une somme proposée : cela se réduit à en prendre d'abord le vingtième, comme il vient d'être dit : puis prendre le tiers de ce vingtieme. Ainsi pour avoir les quatre deniers pour livre de 8762 livres, j'en prends le vingtieme qui est 438 liv. 2 sous, dont le tiers 146 liv. 0 sou 8 deniers forme les quatre deniers pour livre de 8762 livres. En effet, les quatre deniers pour livre, ne sont autre chose que la soixantieme ; puisque 4 deniers sont contenus 60 fois dans la livre. Or le soixantieme est le tiers du vingtieme.

Des Fractions.

78. Les fractions considérées arithmétiquement, sont des nombres par lesquels on exprime les quantités plus petites que l'unité.

Pour se faire une idée nette des fractions, il faut concevoir que la quantité qu'on a prise d'abord pour unité, est elle-même composée d'un certain nombre de parties ou d'unités plus petites ; comme on conçoit, par exemple, que la

livre est composée de vingt parties, ou de vingt unités plus petites, qu'on appelle sous.

Une, ou plusieurs de ces parties, forment ce qu'on appelle une *fraction de l'unité;* mais on donne aussi ce nom aux nombres qui les représentent.

79. Une fraction peut être exprimée en nombres, de deux manières qui sont chacune en usage.

La première manière consiste à représenter, comme les nombres entiers, les parties de l'unité que contient la quantité dont il s'agit; mais alors, on donne un nom particulier à ces parties.

Ainsi, pour marquer 7 parties dont on en conçoit 20 dans la livre, on emploieroit le chiffre 7, mais on prononceroit 7 sous, et on écriroit 7ˢ: cette manière de marquer les parties de l'unité, a lieu dans les nombres complexes dont nous parlerons par la suite.

80. Mais comme il faudroit un signe particulier pour chaque division qu'on pourroit faire de l'unité, on évite cette multiplicité de signes, en marquant une fraction, par deux nombres placés l'un au-dessous de l'autre, et séparés par un trait.

Ainsi, pour marquer les sept parties dont il vient d'être question, on écrit $\frac{7}{20}$; c'est-à-dire, qu'en général, on écrit d'abord le nombre qui marque combien la quantité dont il s'agit contient de parties de l'unité; et on écrit au-dessous de ce nombre, celui qui marque combien on conçoit de ces parties dans l'unité.

81. Et pour énoncer une fraction, on énonce d'abord le nombre supérieur (qui s'appelle le *numérateur*); ensuite le nombre inférieur (qui s'appelle le *dénominateur*); mais on ajoute au nom de celui-ci, la terminaison *ième*.

Par exemple, pour énoncer $\frac{7}{20}$, on prononcera *sept vingtièmes*. Pour énoncer $\frac{4}{5}$, on prononcera *quatre cinquièmes*: et par cette expression *quatre cinquièmes*, on doit entendre quatre parties dont il en faudroit cinq pour composer l'unité.

Il faut seulement excepter de la terminaison générale, les fractions dont le dénominateur est 2, ou 3, ou 4, qui se prononcent, *moitié* ou *demi*, *tiers*, *quarts*. Ainsi ces fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, se prononceroient *un demi*, *deux tiers*, *trois quarts*.

82. Le numérateur marque donc combien la quantité représentée par la fraction, contient de parties de l'unité ; et le dénominateur fait connoître de quelle valeur sont ces parties, en marquant combien il en faut pour composer l'unité. On lui donne le nom de *dénominateur*, parce que c'est lui, en effet, qui donne le nom à la fraction, et qui fait que dans ces deux fractions, par exemple, $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{7}$, les parties de la première s'appellent des *cinquièmes*, et les parties de la seconde des *septièmes*.

83. Le numérateur et le dénominateur s'appellent aussi, d'un nom commun, les deux *termes de la fraction*.

Des Entiers considérés sous la forme de Fractions.

84. Les opérations qu'on fait sur les fractions, conduisent souvent à des résultats fractionnaires, dont le numérateur est plus grand que le dénominateur, par exemple, à des résultats tels que $\frac{8}{3}$, $\frac{27}{5}$, etc.

Ces sortes d'expressions ne sont pas des fractions proprement dites, mais ce sont des nombres entiers joints à des fractions.

85. Pour extraire les entiers qui s'y trouvent renfermés, il faut diviser le numérateur, par le dénominateur. Le quotient marquera les entiers ; le reste de la division sera le numérateur de la fraction qui accompagne ces entiers.

Ainsi $\frac{27}{5}$, donneront $5\frac{2}{5}$, c'est-à-dire, cinq entiers et deux cinquièmes.

En effet, dans l'expression $\frac{27}{5}$, le dénominateur 5, fait connoître que l'unité est composée de 5 parties; donc, autant de fois il y aura 5 dans 27, autant il y aura d'unités entières dans la valeur de la fraction $\frac{27}{5}$.

86. Les multiplications et les divisions des nombres entiers joints aux fractions, exigent du moins pour la facilité, qu'on convertisse ces entiers en fraction.

On fait cette conversion en multipliant le nombre entier par le dénominateur de la fraction en laquelle on veut réduire cet entier.

Par exemple, si on veut convertir 8 entiers en cinquièmes, on multipliera 8 par 5, et on aura $\frac{40}{5}$. En effet, lorsqu'on veut convertir 8 en cinquièmes, on regarde l'unité comme composée de 5 parties, les 8 unités, en contiendront donc 40 : pareillement $7\frac{4}{9}$ convertis en neuvièmes, feront $\frac{67}{9}$.

Des changemens qu'on peut faire subir aux termes d'une Fraction, sans changer la valeur de cette Fraction.

87. Il est visible que plus on concevra de parties dans l'unité, et plus il faudra de ces parties pour composer une même quantité.

88. Donc, on peut rendre le dénominateur d'une fraction, double, triple, quadruple, etc. sans rien changer à la valeur de la fraction ; pourvu qu'en même temps, on rende aussi le numérateur, double, triple, quadruple, etc.

On peut donc dire, en général, *qu'une fraction ne change point de valeur, quand on multiplie ses deux termes par un même nombre.*

Ainsi, $\frac{3}{4}$ est la même chose que $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$, la même chose que $\frac{2}{4}$, que $\frac{3}{6}$, que $\frac{5}{10}$, etc.

89. Par un raisonnement semblable, on voit que moins il y aura de parties dans l'unité, moins il faudra de ces parties pour former une même quantité; que par conséquent, on peut, sans changer une fraction, rendre son dénominateur 2, 3, 4, etc. fois plus petit, pourvu qu'en même temps, on rende son numérateur 2, 3, 4, etc. fois plus petit; et en général, *une fraction ne change point de valeur, quand on divise ses deux termes, par un même nombre.*

Pour voir distinctement la vérité de ces deux propositions, il suffit de se rappeller ce que c'est que le dénominateur, et ce que c'est que le numérateur d'une fraction.

En effet, quand on multiplie, par exemple, le dénominateur d'une fraction par quatre, il marque alors que l'unité est partagée en 4 fois plus de parties, lesquelles sont par conséquent 4 fois plus petites; il faut donc, pour que la fraction ne change pas de valeur, prendre quatre fois plus de parties; c'est ce qu'on fait en multipliant par 4, le numérateur, qui marque combien on prend de parties.

Remarquons donc, que multiplier ou diviser les deux termes de la fraction par un même nombre, n'est point multiplier ou diviser la fraction, puisque, comme nous venons de le dire, elle ne change point de valeur par ces opérations.

Les deux principes que nous venons de poser, sont la base des deux réductions suivantes, qui sont d'un très-grand usage.

Réduction des Fractions à un même Dénominateur.

90. 1°. Pour réduire deux fractions à un même dénominateur, multipliez les deux termes de la première, chacun par le dénominateur de la seconde; et les deux termes de la seconde, chacun par le dénominateur de la première.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur, les deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$; je multiplie 2 et 3, qui sont les deux termes de la première fraction, chacun, par 4, dénominateur de la seconde, et j'ai $\frac{8}{12}$ qui (81) est de même valeur que $\frac{2}{3}$.

Je multiplie, de même, les deux termes 3 et 4, de la seconde fraction, chacun, par 3, dénominateur, de la première; et j'ai $\frac{9}{12}$ qui est de même valeur que $\frac{3}{4}$; en sorte que les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{4}$ sont changées en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$, qui sont respectivement de même valeur que celles-là, et qui ont le même dénominateur entr'elles.

Il est aisé de voir, que par cette méthode, le dénominateur sera toujours le même pour chacune des deux nouvelles fractions; puisque dans chaque opération, le nouveau dénominateur est formé de la multiplication des deux dénominateurs primitifs.

91. 2.° Si on a plus de deux fractions, on les réduira toutes au même dénominateur, en multipliant les deux termes de chacune, par le produit résultant de la multiplication des dénominateurs des autres fractions.

Par exemple, pour réduire à un même dénominateur, les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$; je multiplierai les deux termes 2 et 3 de la première, par le produit des trois dénominateurs, 4, 5, 7, des autres fractions, produit que je trouve en disant: 4 fois 5, font 20; puis 7 fois 20, font 140; je multiplie donc 2 et 3 chacun par 140, et j'ai $\frac{280}{420}$, qui est de même valeur que $\frac{2}{3}$ (81)

Je multiplie pareillement, les deux termes 3 et 4 de la seconde fraction, par le produit de 3, 5, 7; produit que je forme en disant: trois fois 5, font 15; puis 7 fois 15, font 105; je multiplie donc 3 et 4, chacun par 105; ce qui me donne $\frac{315}{420}$, fraction de même valeur que $\frac{3}{4}$.

Passant à la troisième fraction, je multiplie ses deux termes 4 et 5, chacun par 84, produit des trois dénominateurs 3, 4 et 7; et j'ai $\frac{336}{420}$, au lieu de $\frac{4}{7}$.

Enfin pour la quatrième, je multiplierai 5 et 7, chacun par le produit 60 des dénominateurs 3, 4, 5 des trois premières fractions, et j'aurai $\frac{300}{420}$, au lieu de $\frac{5}{7}$, en

sorte que les quatre fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, sont changées en $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$, moins simples, à la vérité, que celles-là, mais de même valeur qu'elles, et plus susceptibles, par leur dénominateur commun, des opérations de l'addition et de la soustraction.

Remarquons que le dénominateur de chaque nouvelle fraction, étant formé du produit de tous les dénominateurs primitifs, ce nouveau dénominateur ne peut manquer d'être le même pour chaque fraction.

Réduction des Fractions à leur plus simple expression.

92. Une fraction est d'autant plus simple, que ses deux termes sont de plus petits nombres. Il est souvent possible d'amener une fraction proposée, à être exprimée par de moindres nombres, et cela lorsque son numérateur et son dénominateur peuvent être divisés par un même nombre ; comme cette opération n'en change point la valeur (89), c'est une simplification qu'on ne doit pas négliger.

Voici le procédé qu'il faudra suivre.

93. On divisera le numérateur et dénominateur, chacun par 2 ; et on répétera cette division tant qu'elle pourra être faite exactement.

On divisera, ensuite, les deux termes, par 3, et on continuera de diviser l'un et l'autre par 3, tant que cela pourra être fait.

On fera la même chose successivement, avec les nombres 5, 7, 11, 13, 17, etc. c'est-à-dire, avec les nombres qui n'ont d'autre diviseur qu'eux-mêmes, ou l'unité, et qu'on appelle *nombres premiers*.

Ainsi, la seule difficulté qu'il y ait, est de savoir quand est-ce qu'on pourra diviser par 2, 3, 5, etc.

On pourra, dans cette recherche, s'aider des principes suivans.

94. Tout nombre qui finit par un chiffre pair, est divisible par 2.

Tout nombre dont la somme des chiffres ajoutés ensembles, comme s'ils étoient des unités simples, sera 3 ou un *multiple* de 3, c'est-à-dire un nombre exact de fois 3, sera divisible par 3.

Par exemple, 54231 est divisible par 3, parce que ses chiffres 5, 4, 2, 3, 1, font 15, qui est 5 fois 3.

La même chose a lieu pour le nombre 9, si les chiffres, ajoutés ensemble, font 9, ou un multiple de 9.

Cette propriété du nombre 3 se démontre comme celle du nombre 9 à très-peu de chose près; et l'un et l'autre se démontrent comme on l'a fait à la preuve de 9 (75).

Tout nombre terminé par un 5 ou par un zéro, est divisible par 5.

A l'égard du nombre 7 et des suivans, quoiqu'il soit facile de trouver de pareilles règles, comme l'examen qu'elles supposent est aussi long que la division, il faudra essayer la division.

Proposons-nous pour exemple, de réduire la fraction $\frac{2016}{3780}$. Je divise les deux termes par 2, parce que les deux derniers chiffres de chacun, sont pairs; et j'ai $\frac{1008}{1890}$. Je divise encore par 2, et j'ai $\frac{504}{945}$. Ce qui a été dit ci-dessus, m'apprend que je puis diviser par 3; je divise en effet, et j'ai $\frac{168}{315}$; je divise encore par 3, ce qui me donne $\frac{56}{105}$; enfin j'essaie de diviser par 7; la division réussit et me donne $\frac{8}{15}$.

La raison pour laquelle nous avons prescrit de ne tenter la division que par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, etc. c'est qu'après avoir épuisé la division par 2, par exemple, il est inutile de tenter de diviser par 4; puisque si celle-ci pouvoir réussir, à plus forte raison la division par 2, auroit-elle pu encore être faite.

95. *De tous les moyens qu'on peut employer pour réduire une fraction à une expression plus simple, le plus direct, est celui de diviser les deux termes par le plus grand diviseur commun qu'ils puissent avoir : voici la règle pour trouver ce plus grand diviseur commun.*

Divisez le plus grand des deux termes par le plus petit ; s'il n'y a pas de reste, c'est le plus petit terme qui est le plus grand diviseur commun.

S'il y a un reste, divisez ce plus petit terme, par ce reste ; et si la division se fait exactement, c'est ce premier reste qui est le plus grand diviseur commun.

Si cette seconde division donne un reste ; divisez le premier reste, par le second ; et continuez toujours de diviser le reste précédent, par le dernier reste, jusqu'à ce que vous arriviez à une division exacte. Alors, le dernier diviseur que vous aurez employé, sera le plus grand diviseur des deux termes de la fraction.

Si le dernier diviseur se trouve être l'unité, c'est une preuve que la fraction ne peut être réduite.

Prenons pour exemple la fraction $\frac{3760}{9024}$.

Je divise 9024 *par* 3760 ; *j'ai pour quotient* 2, *et pour reste* 1504.

Je divise 3760 *par* 1504 ; *j'ai pour quotient* 2, *et pour reste* 752.

Je divise le premier reste 1504, *par le second reste* 752 : *la division réussit, et j'en conclus que* 752 *peut diviser les deux termes de la fraction* $\frac{3760}{9024}$, *et la réduire à sa plus simple expression, qu'on trouve, en fesant l'opération, être de* $\frac{5}{12}$.

En effet, on a trouvé que 752 *divise* 1504 ; *il doit donc diviser* 3760 *qu'on a vu être composé de deux fois* 1504 *et de* 752 : *on voit de même qu'il doit diviser* 9024, *puisque* 9024 *est composé de deux fois* 3760 *et de* 1504.

On voit de plus que 752 est le plus grand diviseur commun que puissent avoir 3760 et 9024 ; car il ne peut y avoir de diviseur commun entre 9024 et 3760 qui ne le soit en même temps de 3760 et 1504 ; et entre ces deux-ci, il ne peut y en avoir un qui ne soit en même temps diviseur commun de 1504 et de 752 ; mais il est évident qu'entre ces deux-ci, il ne peut y avoir de diviseur commun plus grand que 752 ; donc, etc.

Différentes manières dont on peut envisager une Fraction, et conséquences qu'on peut en tirer.

96. L'idée que nous avons donnée jusqu'ici, d'une fraction, est que le dénominateur présente de combien de partie l'unité est composée; et le numérateur, combien il y a de ces parties dans la quantité que la fraction exprime.

On peut encore envisager une fraction, sous un autre point de vue : on peut considérer le numérateur, comme représentant une certaine quantité qui doit être divisée en autant de parties qu'il y a d'unités dans le dénominateur.

Par exemple, dans $\frac{4}{7}$, on peut considérer 4, comme représentant quatre choses quelconques, 4 livres par exemple, qu'il s'agit de partager en cinq parties; car il est évident que c'est la même chose de partager 4 livres en cinq parties pour prendre une de ces parties, ou de partager une livre en cinq parties, pour en prendre 4.

97. On peut donc considérer le numérateur d'une fraction, comme un dividende, et le dénominateur, comme un diviseur. On voit par-là ce que signifient les restes de division, mis sous la forme que nous leur avons donnée (60).

98. Il suit de-là, 1° qu'un entier peut toujours être mis sous la forme d'une fraction, en faisant de cet entier, le numérateur; et lui donnant l'unité pour dénominateur; ainsi 8 ou $\frac{8}{1}$ sont la même chose; 5 ou $\frac{5}{1}$ sont la même chose.

99. 2°. Que pour convertir une fraction quelconque, en décimales, il n'y a qu'à considérer le numérateur, comme un reste de division où le dénominateur

dénominateur étoit diviseur, et opérer par conséquent, comme il a été dit (68), en observant de mettre d'abord un zéro, au quotient, pour tenir la place des unités; c'est ainsi qu'on trouvera que $\frac{1}{2}$ valent, en décimales, 0,6; que $\frac{1}{9}$, valent 0,555, etc. que $\frac{1}{25}$, vaut 0,04; et ainsi de suite.

C'est ainsi qu'on peut réduire en décimales, tout nombre complexe proposé. Par exemple, s'il s'agit de réduire $3^t\ 5^p\ 8^p\ 7^l$ en décimales de la toise, de maniere à ne pas négliger une demi-ligne : j'observe que la toise contient 864 lignes, et par conséquent 1728 demi-lignes; il faut donc pour ne pas négliger les demi-lignes, porter l'exactitude au-delà des milliemes; c'est-à-dire, jusqu'aux dix milliemes.

Cela posé, je réduis les $5^p\ 3^p\ 8^l$ tout en lignes; et j'ai 823 lignes ou $\frac{823}{864}$ de la toise : réduisant cette fraction en décimales, comme il vient d'être dit, on a 0,9525, et par conséquent 3^T, 9525, pour le nombre proposé.

Des opérations de l'Arithmétique sur les Fractions.

100. On fait sur les fractions les mêmes opérations que sur les nombres entiers. Les deux premieres opérations, l'addition et la soustraction exigent le plus souvent une opération préparatoire; les deux autres n'en exigent pas.

De l'Addition des Fractions.

101. Si les fractions ont le même dénominateur, on ajoutera tous les numérateurs, et on donnera à la somme le dénominateur commun de ces fractions.

Ainsi, pour ajouter $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{5}{7}$, j'ajoute les numérateurs 2, 3 et 5; et j'ai par conséquent, $\frac{10}{7}$, que je réduis à $1\ \frac{3}{7}$ (85).

102. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commencera par les y réduire par ce qui a été enseigné (90 et 91); après quoi, on ajoutera ces nouvelles fractions, de la manière qui vient d'être prescrite.

Ainsi, si on propose d'ajouter $\frac{3}{4}, \frac{2}{1}, \frac{4}{5}$; je change ces trois fractions, en ces trois autres $\frac{45}{60}, \frac{40}{60}, \frac{48}{60}$, dont la somme est $\frac{133}{60}$, qui se réduit à $2\ \frac{13}{60}$ (86).

De la Soustraction des Fractions.

103. Si les deux fractions proposées ont le même dénominateur, on retranchera le numérateur de l'une, du numérateur de l'autre; et on donnera au reste, le dénominateur commun de ces deux fractions.

S'il est question de retrancher $\frac{5}{9}$, de $\frac{7}{9}$, le reste sera $\frac{2}{9}$ qui se réduit à $\frac{1}{3}$ (87).

104. Si de $9\ \frac{5}{8}$, on vouloit retrancher $4\ \frac{7}{8}$; comme on ne peut ôter $\frac{7}{8}$, de $\frac{5}{8}$, on emprunteroit sur 9, une unité, laquelle réduite en huitièmes, et ajoutée à $\frac{5}{8}$, feroit $\frac{13}{8}$ desquels ôtant $\frac{7}{8}$, il resteroit $\frac{6}{8}$; ôtant ensuite 4, de 8 qui reste après l'emprunt, il resteroit en tout $4\ \frac{6}{8}$, ou $4\ \frac{3}{4}$.

105. Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on les y réduira (90 et 91); après quoi, on fera la soustraction comme il vient d'être dit.

Ainsi, pour ôter $\frac{2}{3}$, de $\frac{3}{4}$; je change ces fractions en $\frac{8}{12}$ et $\frac{9}{12}$; et retranchant 8, de 9, il me reste $\frac{1}{12}$.

De la Multiplication des Fractions.

106. Pour multiplier une fraction, par une autre fraction; il faut multiplier le numérateur de l'une, par le numérateur de l'autre, et le dénominateur, par le dénominateur.

Par exemple, pour multiplier $\frac{2}{3}$, par $\frac{4}{5}$; on multipliera 2 par 4, ce qui donnera 8 pour numérateur; multipliant pareillement, 3 par 5, on aura 15 pour dénominateur; et par conséquent $\frac{8}{15}$, pour le produit.

Pour sentir la raison de cette règle, il faut se rappeller que, multiplier un nombre par un autre, c'est prendre le multiplicande autant de fois que le multiplicateur contient d'unités. Ainsi, multiplier $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ c'est prendre $\frac{4}{5}$ de fois la fraction $\frac{2}{3}$; ou plus exactement, c'est prendre 4 fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$: or en multipliant le dénominateur 3, par 5, on change les tiers en cinquièmes, c'est-à-dire, en parties cinq fois plus petites; et en multipliant le numérateur 2, par 4, on prend ces nouvelles parties quatre fois; on prend donc quatre fois la cinquième partie de $\frac{2}{3}$; on multiplie donc, en effet, $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$.

107. Si on avoit un entier à multiplier par une fraction, ou une fraction à multiplier par un entier; on mettroit l'entier sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur.

Par exemple, si j'ai 9 à multiplier par $\frac{4}{7}$; cela se réduit à multiplier $\frac{9}{1}$ par $\frac{4}{7}$, ce qui, selon la règle qu'on vient de donner, produit $\frac{36}{7}$ qui se réduisent à $5\frac{1}{7}$.

On voit donc que pour multiplier une fraction par un entier ou un entier par une fraction, l'opération se réduit à multiplier le numérateur de cette fraction, par l'entier.

108. S'il y avoit des entiers joints aux fractions; il faudroit, avant de faire la multiplication, réduire ces entiers, chacun en fraction de même espèce que celle qui l'accompagne.

Par exemple, si on a $12\frac{3}{4}$, à multiplier par $9\frac{3}{4}$: je change (86) le multiplicande en $\frac{51}{4}$, et le multiplicateur

en $\frac{19}{4}$; et je multiplie $\frac{63}{5}$ par $\frac{19}{4}$, selon la règle ci-dessus (106); ce qui me donne $\frac{1417}{20}$, qui valent $122\frac{17}{20}$.

On pourroit, encore, faire cette même opération, en multipliant l'entier et la fraction du multiplicande, par l'entier du multiplicateur; puis, par la fraction du même multiplicateur, en cette manière : . . . . .

$$\begin{array}{r} 12\frac{3}{5} \\ 9\frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$$

produit de 12 par 9.....	108	
de $\frac{3}{5}$ par 9.....	$5\frac{2}{5}$	ou $\frac{6}{20}$
de 12 par $\frac{3}{4}$.....	9	
de $\frac{3}{5}$ par $\frac{3}{4}$.....	$0\frac{9}{20}$	ou $\frac{9}{20}$
	$122\frac{17}{20}$	

Mais cette manière d'opérer est, en général, moins simple que la première.

Divisions des Fractions.

109. Pour diviser une fraction, par une autre fraction; il faut renverser les deux termes de la fraction qui sert de diviseur, et multiplier la fraction dividende, par cette fraction ainsi renversée.

Par exemple, pour diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, je renverse la fraction $\frac{2}{3}$, ce qui me donne $\frac{3}{2}$; je multiplie $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{2}$, selon la règle donnée (106); et j'ai $\frac{12}{10}$ ou $1\frac{2}{10}$, pour le quotient de $\frac{4}{5}$ divisé par $\frac{2}{3}$.

Pour appercevoir la raison de cette règle; il faut observer, que diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, c'est chercher combien de fois $\frac{4}{5}$ contiennent $\frac{2}{3}$: or il est facile de voir que, puisque le diviseur est des tiers, il sera contenu dans le dividende, trois fois autant que s'il étoit composé de pareil nombre d'entiers: mais pour savoir combien 2 entiers seront contenus dans $\frac{4}{5}$, il faut diviser par 2 ; donc, puisque $\frac{2}{3}$ y sont contenus 3 fois autant, il faut, après avoir divisé par 2,

multiplier par 3; ce qui n'est autre chose que de multiplier par $\frac{1}{2}$, qui est la fraction diviseur renversée.

110. Si l'on avoit une fraction, à diviser par un entier; ou un entier, à diviser par une fraction; on commenceroit par mettre l'entier, sous la forme de fraction, en lui donnant l'unité pour dénominateur.

Par exemple, si on a 12, à diviser par $\frac{5}{7}$; on réduira l'opération à diviser $\frac{12}{1}$ par $\frac{5}{7}$, ce qui, selon la règle qu'on vient de donner, se réduit à multiplier $\frac{12}{1}$ par $\frac{7}{5}$, et donne $\frac{84}{5}$ ou $16\frac{4}{5}$.

Pareillement, si l'on avoit $\frac{3}{4}$ à diviser par 5, on réduiroit l'opération à diviser $\frac{3}{4}$ par $\frac{5}{1}$, c'est-à-dire, à multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{1}{5}$, ce qui donne $\frac{3}{20}$.

On voit donc que lorsqu'on a une fraction à diviser par un entier, l'opération se réduit à multiplier le dénominateur, par cet entier.

111. S'il y avoit des entiers joints aux fractions, on réduiroit ces entiers, chacun, en fraction de même espèce que celle qui l'accompagne.

Par exemple, si on avoit $54\frac{3}{5}$ à diviser par $12\frac{2}{3}$: on changeroit le dividende, en $2\frac{73}{5}$; et le diviseur, en $\frac{38}{3}$; et l'opération seroit réduite à diviser $2\frac{73}{5}$ par $\frac{38}{3}$; c'est-à-dire (109) à multiplier $2\frac{73}{5}$ par $\frac{3}{38}$; ce qui donneroit $\frac{819}{190}$ ou $4\frac{59}{190}$.

Quelques applications des règles précédentes.

112. Après ce que nous avons dit (96 et suiv.), il est aisé de voir comment on peut évaluer une fraction.

Qu'on demande, par exemple, ce que valent les $\frac{5}{7}$ d'une livre. Puisque les $\frac{5}{7}$ d'une livre sont la même chose (96) que le septième de 5 livres, je réduis les 5 livres en sous, (57) et je divise les 100 sous qu'elles me donnent, par 7, ce qui me donne 14 sous pour quotient et 2 sous de reste:

je réduis ces 2 sous en deniers, et je divise 24 deniers par 7; j'ai 3 deniers $\frac{3}{7}$; ainsi, les $\frac{5}{7}$ d'une livre, sont 14 sous 3 deniers et $\frac{3}{7}$ de deniers.

Si on demandoit les $\frac{5}{7}$ de 24 livres; il est visible qu'on pourroit d'abord prendre, comme nous venons de le faire, les $\frac{5}{7}$ d'une livre, et multiplier ensuite, par 24; ce qu'auroit donné cette opération; mais il est plus commode de multiplier d'abord $\frac{5}{7}$ par 24 livres, ce qui (197) donne $\frac{120}{7}$ livres, et d'évaluer ensuite cette dernière fraction qu'on trouvera valoir 17 livres 2 sous 10 deniers $\frac{2}{7}$.

113. Les fractions décimales n'ayant point de dénominateur, sont encore plus faciles à évaluer.

Si on demande, par exemple, combien valent 0,532 de toise, comme la toise est de six pieds, je multiplierai 0,532 par 6, ce qui me donnera 3,192 pieds, c'est-à-dire 3 pieds et 0,192 de pieds; multipliant cette dernière fraction par 12 pour évaluer en pouces, on aura 2,304 pouces, c'est-à-dire 2 pouces et 0,304 de pouces; enfin multipliant celles-ci par 12 pour réduire en lignes, on aura 3,648 lignes, ou 3 lignes et 0,648 de ligne; c'est-à-dire que la valeur de la fraction 0,532 de toise, sera 3 pi 2 po 3 li et 0,648 de ligne.

Des Fractions de Fractions.

114. L'évaluation des fractions, nous conduit naturellement à parler *des Fractions de Fractions*: on appelle ainsi une suite de fractions séparées les unes des autres par l'article *de*; par exemple $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, etc. sont des fractions de fraction. On les réduit à une seule fraction, en multipliant tous les numérateurs entr'eux, et tous les dénominateurs entr'eux; en sorte que la fraction $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ se réduit à $\frac{6}{12}$ ou $\frac{1}{2}$: la fraction $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$, se réduit à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

En effet, il est facile de voir que prendre les $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$, n'est autre chose que multiplier $\frac{3}{4}$ par $\frac{2}{3}$, puisque c'est prendre $\frac{2}{3}$ de fois la fraction $\frac{3}{4}$; pareillement prendre les $\frac{2}{3}$ *des* $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{5}{6}$ revient à prendre les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{6}$; puisque $\frac{2}{3}$ *de* $\frac{3}{4}$ reviennent à $\frac{6}{12}$; et ce qu'on vient de

dire fait connoître que les $\frac{6}{12}$ *de* $\frac{5}{8}$ reviennent à $\frac{30}{72}$ ou $\frac{5}{12}$.

Si on demandoit les $\frac{3}{4}$ *de* $5\frac{3}{8}$, on convertiroit l'entier 5, en huitièmes; et la question seroit réduite à évaluer la fraction de fraction $\frac{3}{4}$ *de* $\frac{43}{8}$ qu'on trouveroit être $\frac{129}{32}$ ou $4\frac{1}{32}$.

Ajoutons à tout ce que nous avons dit sur les fractions, un exemple qui renferme plusieurs des regles que nous avons établies.

Supposons qu'on veut construire un vaisseau de 140 pieds $\frac{2}{3}$ de longueur, que les distances entre les sabords, en y comprenant l'espace entre le premier sabord et sa rablure de l'étrave, et l'espace entre le dernier sabord et la rablure de l'étambot, fassent 108 $\frac{3}{4}$ pieds : on demande si l'on peut percer 12 sabords à la premiere batterie de chaque bord.

De 140 pieds $\frac{2}{3}$, je retranche 108 $\frac{3}{4}$ (103 *et suiv.*) il me reste 31 $\frac{11}{12}$ pour les sabords; je divise 31 $\frac{11}{12}$ par 12, c'est-à-dire, $\frac{383}{12}$ par $\frac{12}{1}$ (86) et (110), j'ai pour quotient $\frac{383}{144}$ de pied, qui valent 2 pieds et $\frac{95}{144}$, fraction qui, évaluée en pouces et lignes, vaut 7 pouces 11 lignes; ainsi il faudroit donner à chaque sabord 2 pieds 7 pouces 11 lignes, c'est-à-dire, 2 pieds 8 pouces à-peu-près, ce qui est une mesure convenable pour un vaisseau de 140 pieds $\frac{2}{3}$.

115. Lorsqu'une fraction exprimée par des nombres un peu considérables, n'est pas réductible par la méthode donnée (95), et qu'on peut se contenter d'en avoir une valeur approchée, on peut y parvenir par la méthode suivante qui donne alternativement des fractions plus grandes et plus petites que la proposée, mais toujours de plus en plus approchées, en sorte qu'à la derniere opération, on retombe sur la fraction proposée. Prenons, par exemple, la fraction $\frac{10000000}{3141593}$, qui, comme on le verra en Géométrie, exprime le rapport très-approché du

diamètre à la circonférence; et proposons-nous d'exprimer cette fraction par d'autres fractions moins exactes, à la vérité, mais exprimées par des nombres plus simples.

Divisez le numérateur et le dénominateur, par le numérateur, vous aurez $\cfrac{1}{3\frac{14159}{100000}}$. Pour avoir une premiere valeur approchée, négligez la fraction qui accompagne 3, et vous aurez $\frac{1}{3}$ pour premiere valeur approchée, mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur plus approchée, divisez le numérateur et le dénominateur de la fraction qui accompagne 3, chacun par le numérateur de cette fraction, et vous aurez $\cfrac{1}{3\frac{1}{7\frac{887}{15797}}}$; négligez la fraction qui accompagne 7, et vous aurez $\cfrac{1}{3\frac{1}{7}}$, ou (86) $\cfrac{1}{\frac{22}{7}}$, ou (109) $\frac{7}{22}$ pour seconde valeur, qui est plus approchée que la premiere, mais un peu trop foible.

Pour avoir une valeur encore plus approchée, divisez le numérateur et le dénominateur de la fraction qui accompagne 7, chacun par le numérateur de cette fraction; vous aurez $\cfrac{1}{3\frac{1}{7\frac{1}{15\frac{854}{887}}}}$: supprimez la fraction qui accompagne 15, et vous aurez $\cfrac{1}{3\frac{1}{7\frac{1}{15}}}$ qui revient à $\frac{106}{339}$, valeur plus approchée, mais un peu trop forte.

Pour avoir une valeur encore plus approchée, divisez les deux termes de la fraction qui accompagne 15, chacun par le numérateur 854, et vous aurez $\cfrac{1}{3\frac{1}{7\frac{1}{15\frac{1}{1\frac{33}{854}}}}}$; négligeant la fraction $\frac{33}{854}$, vous aurez pour valeur plus approchée, $\frac{113}{355}$, mais qui est un peu trop foible. On voit à présent comment on peut continuer.

Des Nombres complexes.

116. Quoique les règles que nous avons exposées jusqu'ici, puissent servir aussi à calculer les nombres complexes, nous croyons cependant devoir considérer ceux-ci d'une manière plus particulière, parce que la division qu'on y fait de l'unité principale, en facilite souvent le calcul.

Il y a plusieurs sortes de nombres complexes; et les règles, pour les calculer, tiennent beaucoup à la division qu'on a faite de l'unité; cependant il n'est pas nécessaire d'examiner toutes ces espèces pour être en état de les calculer; mais il importe de savoir quels rapports leurs différentes parties ont, tant entr'elles, qu'à l'égard de l'unité principale; c'est par cette raison que nous donnons ici une Table des nombres complexes dont l'usage est le plus fréquent.

TABLE des unités de quelques especes, et caracteres par lesquels on représente ces différentes unités.

POUR LES MONNOIES.

℔ signifie..... livre.	1 livre vaut.. 20 sous.
s ..... sou.	1 sou vaut... 12 deniers.

POUR LES POIDS.

℔ signifie.... livre.	1 livre (poids) vaut 2 marcs.
M ..... marc.	1 marc..... 8 onces.
O ou ℥..... once.	1 once..... 8 gros.
G ou ʒ..... gros.	1 gros 3 deniers ou scrup.
D ou ℈ denier ou scrupule.	1 denier.... 24 grains.
g..... grain.	

POUR L'ÉTENDUE DES LIGNES.

T signifie.... toise.	1 toise vaut.. 6 pieds.
P ..... pied.	1 pied ..... 12 pouces.
p ..... pouce.	1 pouce..... 12 lignes.
l ..... ligne.	1 ligne..... 12 points.
pt ..... point.	

POUR LE TEMPS.

J. signifie..... jour.	1 jour vaut.. 24 heures.
H..... heure.	1 heure..... 60 minutes.
'..... minute.	1 minute ... 60 secondes.
''..... seconde.	1 seconde... 60 tierces.

Nous donnerons en Géométrie les divisions des mesures relatives aux superficies et aux capacités Corps.

Addition des nombres complexes.

117. Pour faire cette opération, on écrit tous les nombres proposés, les uns au-dessous des autres, de manière que toutes les parties d'une même espèce se trouvent chacune dans une même colonne verticale; et après avoir souligné le tout, on commence l'addition par les parties de l'espèce la plus petite : si leur somme ne compose pas une unité de l'espèce immédiatement supérieure, on l'écrit au-dessous; si elle renferme assez de parties pour composer une ou plusieurs unités de l'espèce immédiatement supérieure, on n'écrit, au-dessous de cette colonne, que l'excédent d'un nombre juste d'unités de cette seconde espèce, et on retient celles-ci pour les ajouter avec leurs semblables, sur lesquelles on procède de la même manière.

EXEMPLE I.

ON propose d'ajouter....	227[fl]	14[s]	8[d]
	2549.	18.	5
	184.	11.	11
	17.	10.	7
	2979.	15.	7 somme.

La somme des deniers est 31, qui renferment 2 douzaines de deniers, ou 2 sous, et 7 deniers. Je pose les 7 deniers, et je retiens 2 sous, que j'ajoute avec les unités de sous,

ce qui donne 15 sous, dont je pose seulement le chiffre 5, et je retiens la dixaine pour l'ajouter aux dixaines, ce qui me donne 5; et comme il faut 2 dixaines de sous pour faire une livre, je prends la moitié de 5, qui est 2, avec 1 pour reste; je pose ce reste, et je porte les 2 livres à la colonne des livres, que j'ajoute comme à l'ordinaire.

EXEMPLE II.

ON propose d'ajouter.....	54t	2pi	3po	9l
	12.	5.	4.	11
	9.	4.	11.	11
	8.	2.	9.	10
	85.	3.	6.	5

La somme des lignes monte à 41, qui font 3 pouces 5 lignes; je pose 5 lignes et je retiens les 3 pouces, que j'ajoute avec les pouces : le tout me donne 30 pouces, qui valent 2 pieds 6 pouces; je pose les 6 pouces, et je retiens les 2 pieds, qui, ajoutés avec les pieds, me donnent 15 pieds, qui valent 2 toises 3 pieds; je pose les 3 pieds, et j'ajoute les 2 toises avec les toises : que je trouve monter à 85 toises, en sorte que la somme est 85 toises 3 pieds 6 pouces 5 lignes.

EXEMPLE III.

13℔	15℥	6ʒ	1ʒ	14gr.
26.	14.	7.	2.	23
34.	4.	5.	0.	20
54.	2.	7.	2.	18
32.	15.	3.	1.	19
162.	5.	7.	0.	22

Soustraction des Nombres complexes.

118. Ecrivez les nombres proposés, comme dans l'addition; commencez la soustraction par les unités de l'espèce la plus basse. Si le nombre inférieur peut être retranché du nombre supérieur, écrivez le reste au-dessous; s'il ne peut en être retranché, empruntez sur l'espèce immédiatement supérieure, une unité, que vous réduirez à l'espèce dont il

s'agit, et que vous ajouterez au nombre dont vous ne pouvez retrancher. Faites la même chose pour chaque espèce ; et lorsque vous aurez été obligé d'emprunter, diminuez d'une unité le nombre sur lequel vous avez fait cet emprunt. Enfin, écrivez chaque reste à mesure que vous le trouverez, au-dessous du nombre qui l'a donné.

EXEMPLE I.

De.....	143^{H}	17^{s}	6^{d}
on veut ôter.....	75.	12.	9
	68.	4.	9 reste.

Ne pouvant ôter 9 deniers de 6 deniers, j'emprunte 1 sous qui vaut 12 deniers, et 6 font 18, desquels ôtant 9, il reste 9; j'ôte ensuite 12 sous, non pas de 17 sous, mais de 16 qui restent après l'emprunt, et il reste 4; enfin je retranche 75 livres de 143 livres, et il me reste 68 livres.

EXEMPLE II.

De.....	163^{H}	0^{s}	5^{d}
on veut ôter.....	84.	18.	9
	78.	1.	8 reste.

Comme je ne puis ôter 9 deniers de 5 deniers, et que d'ailleurs il n'y a pas de sous sur lesquels je puisse emprunter, j'emprunte une livre sur 163 livres ; mais j'en laisse, par la pensée, 19 sous à la place du zéro, après quoi j'opère comme ci-dessus.

Multiplication des nombres complexes.

119. On peut réduire généralement la multiplication des nombres complexes, à la multiplication d'une fraction par une fraction ; multiplication dont nous avons donné la règle (106).

Par exemple, si on demande ce que doivent coûter 54 3^{oi} d'ouvrage, à raison de 42^{H} 17^{s} 8^{d} la toise; on peut réduire le multiplicande 42^{H} 17^{s} 8^{d}, tout en deniers, ce qui donnera 10292 deniers, et comme le denier est la 240^{e}

partie de la livre, le multiplicande peut être représenté $^{1}\frac{09}{240}{}^{2}$ de la livre ; pareillement on réduira le multiplicateur $54^{t}\ 3^{pi}$ tout en pieds, ce qui donnera 327^{pi}, et comme le pied est la sixième partie de la toise, on aura pour multiplicateur $^{3}\frac{2}{6}{}^{7}$ de toise, en sorte que la question est réduite à multiplier $^{1}\frac{02}{240}{}^{2}$ de livre par $^{3}\frac{2}{6}{}^{7}$ ce qui (106) donnera $^{3\ 8\ 6}\frac{5\ 4\ 8}{1\ 4\ 4\ 0}{}^{4}$ de livre, qui (112) valent $2337^{tl}\ 2^{s}\ 10^{d}$.

Cette méthode s'étend à toute espèce de nombres complexes, mais elle exige plus de calcul que celle que nous allons exposer ; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas davantage.

120. Un nombre qui est contenu exactement dans un autre, est dit *partie aliquote* de cet autre ; ainsi 3 est partie aliquote de 12 : il en est de même de 2, de 4 et de 6.

Rappellons-nous que multiplier n'étant autre chose que prendre le multiplicande un certain nombre de fois ; multiplier par $8\ \frac{3}{4}$, par exemple, c'est prendre le multiplicande 8 fois, et le prendre encore $\frac{3}{4}$ de fois, ou en prendre les $\frac{3}{4}$. Or on peut prendre ces $\frac{3}{4}$, ou en prenant d'abord le quart et l'écrivant 3 fois, ou bien en prenant d'abord la moitié, et ensuite la moitié de cette moitié.

Ainsi pour multiplier 84 par $8\ \frac{3}{4}$,
J'écrirois..... 84
$8\ \frac{3}{4}$

672
42
21

735 produit.

Et multipliant 84 par 8, j'aurois d'abord 672. Ensuite pour prendre les $\frac{3}{4}$ de 84, je prendrois d'abord la moitié qui est 42 : puis pour prendre pour le quart restant, je prendrois la moitié de 42, qui est 21, et réunissant ces trois produits particuliers, j'aurois 735 pour le produit total.

121. Pour appliquer ceci aux nombres complexes, il faut remarquer que les différentes espèces d'unités au-dessous de l'unité principale, sont des fractions les unes à l'égard des autres et à l'égard de cette unité principale; que par conséquent, pour multiplier facilement par ces sortes de nombres, il faut faire en sorte de les décomposer en parties aliquotes de l'unité principale, de manière que ces parties aliquotes puissent être employées commodément, ou de les décomposer en parties aliquotes les unes des autres; et si cette décomposition ne fournit que des parties aliquotes qui ne soient pas commodes dans le calcul, on y suppléera par de faux produits; c'est ce que nous allons développer dans les exemples suivans.

EXEMPLE I.

On demande combien doivent coûter 54t 3pi à raison de 72 livres la toise.

Il faut multiplier.....	72H		
par.....	54t	3pi	
	288H	0s	0d
	360		
Pour 3 pieds.....	36		
	3924.	0.	0

On multipliera d'abord, selon les règles ordinaires, 72 livres par 54. Ensuite, pour multiplier par 3pi qui sont la moitié de la toise, et qui par conséquent ne doivent donner que la moitié du prix de la toise, on prendra la moitié de 72 livres, et additionnant, on aura 3924 livres pour le produit total.

EXEMPLE II.

Si on avoit.....	72H		
à multiplier par.....	54t	5pi	
	288H	0s	0d
	360		
Pour 3 pieds.....	36		
Pour 2 pieds.....	24		
	3948.	0.	0

On multipliera d'abord 72 livres par 54. Ensuite, au lieu de multiplier par $\frac{5}{6}$, parce que 5 pieds font les $\frac{5}{6}$ de la toise; on décomposera 5 pieds, en 3 pieds et 2 pieds, dont le premier est la moitié, et le second le $\frac{1}{3}$ de la toise, on prendra donc d'abord la moitié de 72 livres, et ensuite le $\frac{1}{3}$ de 72 livres, et on aura, en réunissant tous ces produits particuliers, 3948 livres pour produit total.

EXEMPLE III.

Que l'on ait.....	72^{tt}		
à multiplier par.....	5^{t}	4^{pi}	8^{po}
	360^{tt}	0^{s}	0
Pour 3 pieds.....	36		
Pour 1 pied	12		
Pour 4 pouces	4		
Pour 4 pouces	4		
	416	0	0

Après avoir multiplié par 5 toises, on multipliera par 4 pieds; et pour cet effet on décomposera ce nombre en 3 pieds et un pied; pour 3 pieds on prendra la moitié de 72 livres, qui est 36 livres, et pour un pied, on remarquera que c'est le $\frac{1}{3}$ de 3 pieds, et par conséquent on prendra le $\frac{1}{3}$ de 36 livres, qui est 12 liv. Ensuite pour multiplier par 8 pouces, au lieu de comparer ces 8 pouces à la toise, on les comparera au pied, et on les décomposera en 4 pouces et 4 pouces qui sont chacun le $\frac{1}{3}$ du pied, et qui par conséquent donneront chacun le $\frac{1}{3}$ de 12 livres. Enfin réunissant, on aura 416^{tt} 0^{s} 0^{d} pour produit.

122. Si le multiplicande est aussi un nombre complexe, on se conduira comme il va être expliqué dans l'exemple suivant.

EXEMPLE IV.

Si l'on a.....	72^{tt}	6^{s}	6^{d}
à multiplier par.....	27^{t}	4^{pi}	8^{po}
	504^{tt}	0^{s}	0^{d}
	144		
Pour 5 sous	6	15	0
Pour 1 sou.....	1	7	0
Pour 6 deniers	0	13	6
Pour 3 pieds.....	36	3	3
Pour 1 pied.....	12	1	1
Pour 4 pouces	4	0	$4\frac{1}{3}$
Pour 4 pouces	4	0	$4\frac{1}{3}$
	2009	0	$6\frac{2}{3}$

On multipliera d'abord 72 livres par 27. Ensuite pour multiplier 6 sous par 27, on décomposera ces 6 sous, en 5 sous et 1 sou. Les 5 sous faisant le quart de la livre, doivent, étant multipliés par 27, donner 27 fois le quart de la livre ou le quart de 27 livres; on prendra donc le quart de 27 livres, qui est $6^{\#}\ 15^{s}$. Pour multiplier 1 sou par 27, on remarquera que 1 sou est la cinquième partie de 5 qu'on vient de multiplier; ainsi on prendra le cinquième des $6^{\#}\ 15^{s}$ qui sera une livre 7 sous : à l'égard des 6 deniers, on fera attention qu'ils sont la moitié de 1 sou, et par conséquent on prendra la moitié d'une livre 7 sous qu'on a eu pour un sou.

Jusque-là tout le multiplicande est multiplié par 27.

Pour multiplier par 4 pieds, on s'y prendra de la même manière que dans l'exemple précédent; c'est-à-dire, que pour les 4 pieds, on prendra d'abord pour 3 pieds, la moitié $36^{\#}\ 3^{s}\ 3^{d}$ du multiplicande, et pour 1 pied, le tiers de ce que donnent les 3 pieds.

Enfin pour 8 pouces on prendra 2 fois pour 4; c'est-à-dire, qu'on écrira 2 fois le tiers de ce qu'on vient d'avoir pour 1 pied; en réunissant toutes ces différentes parties, on aura $2009^{\#}\ 0^{s}\ 6^{d}\ \frac{2}{3}$ pour produit total.

117. Jusqu'ici les parties du multiplicande qu'il a fallu prendre, ont été assez faciles à évaluer; mais dans les cas où ces parties seroient plus composées, on se conduiroit comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE V.

A raison de..... $34^{\#}\ 10^{s}\ 2^{d}$ la toise
Combien doivent coûter.... 17 toises ?

$238^{\#}$	0^{s}	0^{d}
34		
8	10	
ø	x7	
0	2	10
586	12	10

Après avoir multiplié 34 livres par 17, et ensuite les 10 sous par 17, en prenant moitié de 17; on multipliera 2 deniers qui sont la sixième partie d'un sou, et par conséquent la sixième partie de la dixième partie, ou (114) le

la 60e partie de 10 sous ; mais au lieu de prendre la 60e partie de 8 livres 10 sous, il sera plus commode de faire un faux produit, et de prendre d'abord le dixième de ce qu'ont donné 10 sous ; c'est-à-dire, le dixième de 8 livres 10 sous ; ce dixième qui est 0 livres 17 sous, est pour un sou ; mais comme il ne faut que pour le sixième d'un sou, on barrera ce faux produit, et on en écrira le sixième au-dessous.

EXEMPLE VI.

Combien pour 34tt 10s 2d fera-t-on faire d'ouvrage à raison de une livre pour 17 toises ?

Il faut multiplier 17 toises par 34tt 10s 2d ; c'est-à-dire, prendre 17 toises autant de fois qu'il y a d'unités dans 34tt 10s 2d.

17 toises.				
34tt	10s	2d		
681	0pi	0p	0l	0pts
61				
8	3			
✗	✗	✗	✗	✗ $\frac{✗}{✗}$
0	0	10	2	$4\frac{4}{5}$
586	3	10	2	$4\frac{4}{5}$

Ainsi on multipliera d'abord 17 toises par 34 ; ensuite pour multiplier 17 toises par 10 sous, on prendra la moitié de 17 toises, parce que 10 sous font la moitié de la livre, et on aura 8 toises 3 pieds. Pour multiplier par 2 deniers, on cherchera, pour plus de facilité, ce que donneroit 1 sou, en prenant le dixième de ce qu'ont donné 10 sous ; ce dixième est 0t 5pi 1po 2l 4pts et $\frac{8}{10}$ ou $\frac{4}{5}$ de point ; on le barrera comme ne devant pas faire partie du produit, mais on en prendra le sixième pour avoir le produit de 2 deniers, et on écrira au-dessous ce sixième, qui est 0l 0pi 10po 2l 4pts et $\frac{24}{30}$ ou $\frac{4}{5}$,

Nous avons donné cet exemple, principalement pour confirmer ce que nous avons dit (45), qu'il importoit de distinguer le multiplicande, du multiplicateur, lorsqu'ils sont tous les deux concrets :

en effet, dans l'exemple précédent, ainsi que dans celui-ci, les facteurs du produit sont également 17 toises et 34^{tt} 10^{s} 2^{d}, cependant les deux produits sont différens.

Division d'un nombre complexe par un nombre incomplexe.

124. Si le dividende seul est complexe, et si en même temps le dividende et le diviseur ont des unités de différente espèce, on divisera d'abord les unités principales du dividende, selon la règle ordinaire ; ce qui restera de cette division, on le réduira (57) en unités de la seconde espèce, qu'on ajoutera avec celles de même espèce qui se trouveront dans le dividende, et on divisera le tout comme à l'ordinaire : on réduira pareillement le reste de cette division en unités de la troisième espèce, auxquelles on ajoutera celles de la même espèce qui se trouveront dans le dividende, et on divisera le tout comme ci-dessus; on continuera de réduire les restes en unités de l'espèce suivante, tant qu'il s'en trouvera d'inférieures dans le dividende.

EXEMPLE I.

On a donné 4783^{tt} 3^{s} 9^{d} pour paiement de 87 toises d'ouvrage ; on demande à combien cela revient la toise ?

4783^{tt}	3^{s}	9^{d}	87	
433			54^{tt}	19^{s} 7^{d}
85				
1703^{s}				
833				
50				
609^{d}				
000				

Il faut diviser 4783^{tt} 3^{s} 9^{d} par 87, en commençant par les livres.

Les 4783 livres, divisées par 87, selon la règle ordinaire, donneront 54 livres pour quotient, et 85 livres pour reste : ces 85 livres réduites en sous (57), donneront avec les 3 sous du dividende 1703 sous, qui divisés par 87, donnent 19 pour quotient, et 50 sous pour reste : ces 50 sous réduits en deniers, donnent, avec les 9 deniers du dividende, 609 deniers, lesquels divisés par 87, donnent enfin 7 deniers pour quotient.

125. Mais si le dividende et le diviseur ont des unités de même espèce, il faut, avant de faire la division, examiner si le quotient doit être ou ne pas être de même espèce qu'eux; ce que l'état de la question décide toujours.

126. Dans le cas où le dividende et le diviseur étant de même espèce, le quotient devra aussi être de même espèce qu'eux, la division se fera précisément comme dans le cas précédent; par exemple, si on proposoit cette question, 1243 livres ont produit un bénéfice de 7254 livres, à combien cela revient-il par livre? Il est évident que le quotient doit avoir des unités de même espèce que le dividende et le diviseur; c'est-à-dire, doit être des livres, et qu'on doit diviser 7254 livres par 1243, en réduisant, comme dans l'exemple précédent, le reste de cette division en sous, et le second reste en deniers, et on trouvera $5^{\text{ff}}\ 16^{\text{s}}\ 8^{\text{d}}\ \frac{760}{1243}$, pour réponse à la question.

127. Mais lorsque le dividende et le diviseur étant de même espèce, le quotient devra être d'espèce différente; alors il faudra commencer par réduire (57) le dividende et le diviseur, chacun, la plus petite espèce qui soit dans le dividende; après quoi on fera la division comme dans le cas précédent, et on y traitera les unités du dividende, comme si elles étoient de même espèce que celles que doit avoir le quotient.

Par exemple, si l'on proposoit cette question, combien pour 7954# 11s 7d fera-t-on faire d'ouvrage à raison de 72 livres la toise ? Il est clair, par la nature de la question, que le quotient doit être des toises et parties de toise. On réduira donc 7954# 11s 7d tout en deniers, ce qui donnera 1909099 ; on réduira pareillement 72 livres en deniers, et on aura 17280, on divisera 1909099 considéré comme des toises, par 17280, et on aura pour quotient 110t 2pi 10po 6l $\frac{19}{20}$.

Division d'un nombre complexe par un nombre complexe.

128. Lorsque le diviseur est aussi un nombre complexe, il faut le réduire à sa plus petite espèce (57) ; multiplier le dividende par le nombre qui exprime combien il faut de parties de la plus petite espèce du diviseur pour composer l'unité principale, de ce même diviseur ; alors la division sera réduite au cas précédent où le diviseur étoit incomplexe.

EXEMPLE.

57t 5pi 5po d'ouvrage ont été payées 854# 17s 11d ; on demande à combien cela revient la toise ? Il faut diviser 854# 17s 11d par 57t 5pi 5po ; et pour cet effet je réduis les 57t 5pi 5po en pouces, ce qui me donne 4169 pour nouveau diviseur, et comme il faut 72po pour faire la toise, qui est l'unité principale du diviseur, je multiplie le dividende proposé 854# 17s 11d par 72, ce qui me donne 61552# 10s pour nouveau dividende, en sorte que je divise comme il suit.

61552# 10s	57t 5pi 5po
19862	4169 pouc.
3186	14# 15s 3d $\frac{1^{p}\,3^{l}\,3^{s}}{4169}$
63730s	
22040	
1195	
1434od	
1833	

Les 61552 livres, divisées par 4169 donnent 14 livres pour quotient, et 3186 pour reste. Ces 3186 livres réduites en sous, donnent avec les 10 sous du dividende 63730 sous, qui divisés par 4169 donnent 15 sous pour quotient, et 1195 de reste. Ces 1195 sous réduits en deniers, valent 14340 deniers, lesquels divisés par 4169 donnent 3 deniers pour quotient, et 1833 deniers pour reste; en sorte que le quotient est $14^{\text{liv}}\ 15^{\text{s}}\ 3^{\text{d}}\ \frac{1833}{4169}$ de d.

Pour entendre la raison de cette règle, il faut faire attention que les $57^{\text{t}}\ 5^{\text{pi}}\ 5^{\text{po}}$ valant 4169 pouces, et le pouce étant la 72e partie de la toise, le diviseur est $\frac{4169}{72}$ de la toise; or, pour diviser par une fraction, il faut (109) renverser la fraction diviseur, et multiplier ensuite par cette fraction ainsi renversée; il faut donc ici multiplier par $\frac{72}{4169}$; ce qui revient à multiplier d'abord par 72, et à diviser ensuite par 4169, ainsi que le prescrit la règle que nous donnons.

Comme la division par un nombre complexe se réduit, ainsi qu'on vient de le voir, à la division par un nombre incomplexe, on doit avoir ici les mêmes attentions, à l'égard de la nature des unités que nous avons eues (126 et 127).

Ce seroit ici le lieu de parler du toisé ou de la multiplication et de la division géométriques: ces opérations ne diffèrent en rien, pour le procédé, de celles que nous venons d'exposer; en sorte qu'il n'y auroit ici d'autre chose à ajouter que d'expliquer quelle est la nature des unités des facteurs et du produit, mais cela appartient à la Géométrie. Nous remettrons donc à en parler, jusqu'à ce que nous soyons arrivés à la Géométrie.

De la formation des Nombres quarrés et de l'extraction de leur racine.

129. On appelle *quarré* d'un nombre le produit qui résulte de la multiplication de ce nombre par

lui-même; ainsi 25 est le quarré de 5, parce que 25 résulte de la multiplication de 5 par 5.

130. La *racine quarrée* d'un nombre proposé, est le nombre, qui multiplié par lui-même, reproduiroit ce même nombre proposé; ainsi 5 est la racine quarrée de 25; 7 est la racine quarrée de 49.

131. Un nombre que l'on quarre, est donc tout-à-la-fois multiplicande et multiplicateur; il est donc deux fois facteur (42) du produit; c'est pour cela qu'on appelle aussi ce produit ou quarré, la *seconde puissance* de ce nombre.

Il ne faut d'autre art pour quarrer un nombre, que de le multiplier par lui-même selon les règles ordinaires de la multiplication; mais pour extraire la racine quarrée d'un nombre; c'est-à-dire, pour revenir du quarré à la racine, il faut une méthode, du moins lorsque le nombre ou quarré proposé a plus de deux chiffres.

Lorsque le nombre proposé n'a qu'un ou deux chiffres, sa racine en nombre entier est quelqu'un des nombres.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
dont les quarrés sont
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Ainsi la racine quarrée de 72, par exemple, est 8 en nombres entiers, parce que 72 étant entre 64 et 81, sa racine est entre les racines de ceux-ci; c'est-à-dire, entre 8 et 9, elle est 8 et une fraction, fraction qu'à la vérité on ne peut pas assigner exactement, mais dont on peut approcher continuellement, ainsi que nous le verrons dans peu.

132. La racine quarrée d'un nombre qui n'est point un quarré parfait, s'appelle un nombre *sourd* ou *irrationnel* ou *incommensurable*.

133. Venons aux nombres qui ont plus de deux chiffres.

C'est en observant ce qui se passe dans la formation du quarré, que nous trouverons la méthode qu'on doit suivre pour revenir à la racine.

Pour quarrer un nombre tel que 54, par exemple:

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Après avoir écrit le multiplicande et le multiplicateur, comme on le voit ici, nous multiplions, comme à l'ordinaire, le 4 supérieur par le 4 inférieur, ce qui fait évidemment le *quarré des unités*.

Nous multiplions ensuite le 5 supérieur, par le 4 inférieur, ce qui fait *le produit des dixaines par les unités*.

Nous passons, après cela, au second chiffre du multiplicateur, et nous multiplions le 4 supérieur par le 5 inférieur, ce qui fait le produit des unités par les dixaines, ou (44) *le produit des dixaines par les unités*.

Enfin nous multiplions le 5 supérieur, par le 5 inférieur, ce qui fait *le quarré des dixaines*.

Nous ajoutons ces produits, et nous avons pour quarré, le nombre 2916, que nous voyons donc être composé *du quarré des dixaines, plus deux fois le produit des dixaines par les unités, plus le quarré des unités* du nombre 54.

134. Ce que nous venons d'observer étant une conséquence immédiate des règles de la multiplication, n'est pas plus particulier au nombre 54 qu'à tout autre nombre composé de dixaines et

d'unités; en sorte qu'on peut dire généralement que le quarré de tout nombre composé de dixaines et d'unités, renfermera les trois parties que nous venons d'énoncer; savoir: le quarré des dixaines de ce nombre, deux fois le produit des dixaines par les unités, et le quarré des unités.

135. Cela posé, comme le quarré des dixaines est des centaines, (puisque 10 fois 10 font 100); il est visible que ce quarré des dixaines ne peut faire partie des deux derniers chiffres du quarré total.

Pareillement le produit du double des dixaines multiplées par les unités, ne pouvant être moindre que des dixaines, ne peut faire partie du dernier chiffre du quarré total.

136. Donc pour revenir du quarré 2916, à sa racine, on peut raisonner ainsi.

EXEMPLE.

29. 16	
41 . 6	54 racine.
104	
000	

Commençons par trouver les dixaines de cette racine; or la formation du quarré nous apprend qu'il y a dans 2916, le quarré de ces dixaines, et que ce quarré ne peut faire partie des deux derniers chiffres; il est donc dans 29; et comme la racine quarré de 29 ne peut être plus de 5, concluons-en que le nombre des dixaines de la racine est 5, et portons-les à côté de 2916, comme on le voit ci-dessus.

Je quarre 5, et je retranche le produit 25 de 29, il me reste 4, à côté duquel j'abaisse les deux autres chiffres 16 du nombre proposé 2916.

Pour trouver maintenant les unités de la racine, je fais attention à ce que renferme le reste 416; il ne contient plus que deux parties du quarré, savoir, le double des dixaines de la racine multipliées par les unités, et le quarré des unités de cette même racine. De ces deux parties, la première suffit pour nous faire trouver les unités que nous cherchons; car puisqu'elle est formée du double des dixaines multipliées par les unités, si on la divise par le double des dixaines que nous connoissons, elle doit (74) donner pour quotient les unités: il ne s'agit donc plus que de savoir dans quelle partie de 416 est renfermé ce double des dixaines multipliées par les unités: or, nous avons remarqué ci-dessus, qu'il ne pouvoit faire partie du dernier chiffre; il est donc dans 41: il faut donc diviser 41 par le double 10 des dixaines trouvées; j'écris donc, sous 41, le double 10 des dixaines, et faisant la division, le quotient 4 que je trouve est le nombre des unités, que je porte à la droite des 5 dixaines trouvées.

Mais il faut observer que quoique le quotient 4, que nous venons de trouver, soit en effet celui qui convient, cependant il peut arriver quelquefois que le quotient, trouvé de cette manière, soit plus fort qu'il ne convient; parce que 41 (c'est-à-dire la partie qui reste après la séparation du dernier chiffre), renferme non-seulement le double des dixaines multiplié par les unités, mais encore les dixaines provenantes du quarré des unités; c'est pourquoi, pour n'avoir aucun doute sur le chiffre des unités, il faut employer la vérification suivante.

Après avoir trouvé le chiffre 4, des unités, et l'avoir écrit à la racine, je le porte à côté du double 10 des dixaines, ce qui fait 104, dont je multiplie successivement tous les chiffres par le même nombre 4, et je retranche les produits successifs, des

parties correspondantes de 416; comme il ne reste rien, j'en conclus que la racine est en effet 54.

S'il restoit quelque chose la racine n'en seroit pas moins la vraie racine en nombres entiers, à moins que ce reste ne fût plus grand que le double de la racine, augmenté de l'unité; mais c'est ce qu'on n'a point à craindre quand on prend le quotient toujours au plus fort.

La vérification que nous venons d'enseigner, est fondée sur la formation même du quarré; car quand on multiplie 104 par 4, il est évident qu'on forme le quarré des unités et le double des dixaines multiplié par les unités; c'est-à-dire, ce qui complette le quarré parfait.

137. De ce que nous venons de dire, il faut conclure, que pour extraire la racine quarrée d'un nombre qui n'a pas plus de quatre chiffres, ni moins de trois, il faut, après en avoir séparé deux sur la droite, chercher la racine quarrée de la tranche qui reste à gauche; cette racine sera le nombre des dixaines de la racine totale cherchée, et on l'écrira à côté du nombre proposé, en l'en séparant par un trait.

On soustraira de cette même tranche le quarré de la racine qu'on vient de trouver, et après avoir écrit le reste au-dessous de cette tranche, on abaissera à côté de ce reste les deux chiffres qu'on avoit séparé.

On séparera par un point le chiffre des unités de la tranche qu'on vient d'abaisser, et on divisera ce qui se trouvera sur la gauche, par le double des dixaines, qu'on écrira au-dessous.

On écrira le quotient à côté du premier chiffre de la racine, et on le portera ensuite à côté du double des dixaines qui a servi de diviseur.

Enfin on multipliera par ce même quotient, tous les chiffres qui se trouveront sur cette dernière ligne, et on retranchera leurs produits à mesure qu'on les trouvera, des chiffres qui leur correspondent dans la ligne au-dessus.

Achevons d'éclaircir ceci par un exemple.

EXEMPLE II.

On demande la racine quarrée de 7569.

75.69 | 87 racine.
116.9
167

000

Je sépare les deux chiffres 69, et je cherche la racine quarrée de 75; elle est 8; j'écris 8 à côté: je quarre 8 et je retranche de 75 le quarré 64; il me reste 11 que j'écris au-dessous de 75, et j'abaisse à côté de ce même 11 les chiffres 69 que j'avois séparés.

Je sépare dans 1169 le dernier chiffre 9, pour avoir dans 116 la partie que je dois diviser pour trouver les unités.

Je forme mon diviseur en doublant les 8 dixaines que j'ai trouvées, et j'écris ce diviseur au-dessous de 116: la division me donne pour quotient 7, que j'écris à la racine, à la droite de 8.

Je porte aussi ce quotient à côté du diviseur 16; je multiplie 167, qui forme la dernière ligne, par ce même quotient 7, et je retranche les produits à mesure que je les trouve, de 1169, il ne reste rien: ce qui prouve que 7569 est un quarré parfait, et le quarré de 87.

138. Il faut bien remarquer qu'on ne doit diviser par le double des dixaines, que la seule partie qui reste à gauche après qu'on a séparé le dernier chiffre en sorte que si elle ne contenoit pas le double des dixaines, il ne faudroit pas pour cela employer le chiffre séparé: on mettroit 0 à la racine. Si au contraire on trouvoit que le double des dixaines y est plus de 9 fois, on ne mettroit cependant pas

plus de 9 ; la raison en est la même que pour la division (66.)

139. Après avoir bien compris ce que nous venons de dire sur la racine quarrée des nombres qui n'ont pas plus de 4 chiffres, on saisira facilement ce qu'il convient de faire lorsque le nombre des chiffres est plus grand. De quelque nombre de chiffres que la racine doive être composée, on peut toujours la concevoir composée de deux parties, dont l'une soit des dixaines et l'autre des unités ; par exemple, 874 peut être considéré comme représentant 87 dixaines et 4 unités.

Cela posé, quand on a trouvé les deux premiers chiffres de la racine, par la méthode qu'on vient d'exposer ; on peut aussi trouver le troisième par la même méthode, en considérant ces deux premiers chiffres comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, et leur appliquant, pour trouver le troisième, tout ce qui a été dit du premier pour trouver le second.

Pareillement, quand on aura trouvé les trois premiers chiffres, s'il doit y en avoir un quatrième, on considérera les trois premiers comme ne faisant qu'un seul nombre de dixaines, auquel on appliquera, pour trouver le quatrième, le même raisonnement qu'on appliquoit aux deux premiers, pour trouver le troisième, et ainsi de suite.

Mais pour procéder avec ordre, il faut commencer par partager le nombre proposé en tranches, de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche ; la dernière pourra n'en contenir qu'un.

La raison de cette préparation est fondée sur ce

que considérant la racine comme composée de dixaines et d'unités, il faut, suivant ce qui a été dit ci-dessus (135 *et suiv.*) commencer par séparer les deux derniers chiffres sur la droite, pour avoir dans la partie qui reste à gauche, le quarré des dixaines : mais comme cette partie est elle-même composée de plus de deux chiffres, un raisonnement semblable conduit à en séparer encore deux sur la droite, et ainsi de suite.

Donnons un exemple de cette opération.

EXEMPLE III.

On demande la racine quarrée de 76807696.

```
76.80.76.96 | 8764
128.0
  167
-------
1117.6
 1746
-------
 7009.6
 17524
-------
 00000
```

Après avoir partagé le nombre proposé, en tranches de deux chiffres chacune, en allant de droite à gauche, je cherche quelle est la racine quarrée de la tranche 76, qui est le plus à gauche : je trouve qu'elle est 8, et j'écris 8 à côté du nombre proposé : je quarre 8 et je retranche le quarré 64, de 76 ; j'ai pour reste 12 que j'écris au-dessous de 76 ; à côté de ce reste j'abaisse la tranche 80, dont je sépare le dernier chiffre par un point, et au-dessous de la partie 128, j'écris 16 double de la racine trouvée ; puis disant, en 128, combien de fois 16 ? Je trouve qu'il y est 7 fois ; j'écris 7 à la suite de la racine 8, et à côté du double 16 ; je multiplie 167 par ce même nombre 7, et je retranche de 1280 le produit de cette multiplication ; il me reste 111 à côté duquel j'abaisse la tranche 76, ce qui forme 11176 ; je sépare le dernier chiffre 6 de ce nombre, et sous la partie 1117 qui reste à gauche, j'écris 174 double de la racine 87 ; je divise 1117 par 174, et ayant

trouvé 6 pour quotient, j'écris 6 à la racine et à côté du double 174 : je multiplie 1746 par ce même nombre 6, et je retranche de 11176, il reste 700 ; à côté de ce reste j'abaisse 96, dont je sépare le dernier chiffre ; au-dessous de 7009, qui reste à gauche, j'écris 1752 double de la racine trouvée 876, et divisant 7009 par 1752, je trouve pour quotient 4, que j'écris à la racine et à côté du double 1752. Je multiplie 17524 par ce même nombre 4, et je retranche de 70096, il ne reste rien ; ainsi la racine quarrée de 76807696 est exactement 8764.

140. Lorsque le nombre proposé n'est point un quarré parfait, il y a un reste à la fin de l'opération, et la racine quarrée qu'on a trouvée, est la racine quarrée du plus grand quarré, contenu dans le nombre proposé ; alors il n'est pas possible d'extraire la racine quarrée exactement ; mais on peut en approcher si près qu'on le juge à propos ; c'est-à-dire, de manière que l'erreur qui en résulteroit dans le quarré soit au-dessous de telle quantité qu'on voudra.

Cette approximation se fait commodément par le moyen des décimales. Il faut concevoir à la suite du nombre proposé, deux fois autant de zéros qu'on voudra avoir de décimales à la racine ; faire l'opération comme à l'ordinaire, et séparer ensuite par une virgule sur la droite de la racine, moitié autant de décimales qu'on a mis de zéros à la suite du nombre proposé. En effet, (54) le produit de la multiplication devant avoir autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs ensemble, le quarré (dont les deux facteurs sont égaux) doit donc en avoir le double de ce qu'a l'un des facteurs, c'est-à-dire, le double de ce que doit avoir la racine.

EXEMPLE.

On demande la racine quarrée de 87567 à moins d'un millième près.

Pour faire des millièmes, il faut trois décimales; il faut donc mettre 6 zéros au quarré 87567; ainsi il faut tirer la racine quarrée de 87567000000,

```
8.75.67.00.00.00 | 295917.
47.5
 49
-----
 346.7
  58 5
-------
  5420.0
   590 9
---------
  10190.0
   5918 1
-----------
  427190.0
   59182 7
-----------
  12911 1
```

En faisant l'opération comme dans les exemples précédens, on trouve pour racine quarrée, à moins d'une unité près, le nombre 295917; mais comme cette racine est celle de 87567000000 qui est 1000000 fois plus grand que 87567, dont on demande la racine; il faut rendre cette racine trouvée 295917, mille fois plus petite; c'est-à-dire, en séparer trois chiffres sur la droite, et 295,917 sera la racine quarrée de 87567, à moins d'un millième près.

Pareillement, si l'on demande la racine quarrée de 2, à moins d'un dix-millième près; on tirera la racine quarrée de 200000000 qu'on trouvera être 14142; séparant les quatre chiffres de la droite par une virgule, on aura 1,4142 pour racine quarrée de 2, approchée à moins d'un dix-millième près.

141. On a vu (106) que pour multiplier une fraction par une fraction, il falloit multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur; par conséquent, pour quarrer une fraction, il faut quarrer le numérateur et le dénominateur.

Ainsi le quarré de $\frac{2}{3}$ est $\frac{4}{9}$, celui de $\frac{4}{5}$ est $\frac{16}{25}$.

142. Donc, réciproquement, pour tirer la racine quarrée d'une fraction, il faut tirer la racine quarrée du numérateur et celle du dénominateur.

Ainsi la racine quarrée de $\frac{9}{16}$ est $\frac{3}{4}$, parce que celle de 9 est 3, et celle de 16 est 4.

143. Mais il peut arriver que le numérateur ou le dénominateur, ou tous les deux, ne soient point des quarrés parfaits; s'il n'y a que le numérateur qui ne soit point un quarré, on en tirera la racine approchée par la méthode qu'on vient d'exposer, et ayant tiré la racine du dénominateur, on la donnera pour dénominateur à la racine du numérateur.

Ainsi si l'on demande la racine de $\frac{2}{9}$, on tirera la racine approchée du numérateur 2, qu'on trouvera 1,4 ou 1,41, ou 1,414, ou 1,4142, etc. selon qu'on voudra en approcher plus ou moins; et comme la racine quarrée de 9 est 3, on aura pour racine approchée de $\frac{2}{9}$, la quantité $\frac{1,4}{3}$ ou $\frac{1,41}{3}$ ou $\frac{1,414}{3}$ ou $\frac{1,4142}{3}$ etc.

Mais si le dénominateur n'est pas un quarré, on multipliera les deux termes de la fraction par ce même dénominateur, ce qui ne changera rien à la valeur de la fraction, et rendra ce dénominateur quarré; alors on opérera comme dans le cas précédent.

Par exemple, si on demande la racine quarrée de $\frac{3}{5}$, on changera cette fraction en $\frac{15}{25}$; tirant la racine quarrée de 15, jusqu'à 3 décimales, par exemple, on aura, 3,872, et comme la racine quarrée de 25 est 5, la racine quarrée de $\frac{15}{25}$ sera $\frac{3,872}{5}$.

144. Pour ne pas avoir plusieurs sortes de fractions à la fois, on réduira le résultat $\frac{3,872}{5}$ uniquement en décimales, en divisant 3,872 par 5, ce qui donnera 0,774 pour la racine de $\frac{3}{5}$ exprimée purement en décimales (99).

145. Enfin si on avoit des entiers joints à des fractions, on réduiroit ces entiers en fractions (86),

et

et on opéreroit, comme il vient d'être dit, pour une fraction.

Ainsi, pour tirer la racine quarrée de $8\frac{3}{7}$, on changeroit $8\frac{3}{7}$ en $\frac{59}{7}$, et celle-ci (143) en $\frac{413}{49}$, dont on trouveroit que la racine approchée est $\frac{20,322}{7}$ ou 2,903.

146. On peut aussi réduire en décimales la fraction qui accompagne l'entier, mais il faut observer d'y employer un nombre de décimales, pair et double de celui qu'on veut avoir à la racine; parce que le produit de la multiplication de deux nombres, qui ont des décimales, devant avoir autant de décimales qu'il en y a dans les deux facteurs (54), le quarré d'un nombre qui a des décimales, doit en avoir deux fois autant que ce nombre.

En appliquant cette méthode à $8\frac{3}{7}$, on le transforme en 8,428571, (99) dont la racine est 2,903, comme ci-dessus.

147. Si on a à tirer la racine quarrée d'une quantité décimale, il faut avoir soin de rendre le nombre des décimales pair, s'il ne l'est pas, et cela par la même raison qui vient d'être dite (138); on y parviendra en mettant à la suite de ces décimales 1 ou 3, ou 5, etc. zéros: cela n'en change pas la valeur (30).

Ainsi, pour tirer la racine quarrée de 21,935, à moins d'un millième près, je tire la racine quarrée de 21,935000 qui est 4,683; c'est aussi celle de 21,935. On trouvera de même que celle de 0,542 est à moins d'un millième près, 0,736, et que celle de 0,0054 est à moins d'un millième près 0,073.

148. Quand on a trouvé, par la méthode qui vient d'être exposée, les trois premiers chiffres de la racine, on peut en avoir plusieurs autres avec plus de facilité et de promptitude, par la division seule, en cette maniere.

Prenons pour exemple 763703556823 : je commence par chercher les trois premiers chiffres de la racine, par la méthode ci-dessus : je trouve 873 pour cette racine, et 1574 pour reste : je mets à côté de ce reste, les deux chiffres 55, qui suivent la partie 763703 qui a donné les trois premiers chiffres. (Je mettrois les trois chiffres suivants, si j'avois quatre chiffres de la racine, quatre si j'en avois 5, et ainsi de suite ; je divise 157455 que j'ai alors, par le double 1746 de la racine ; je trouve pour quotient 90 ; ce sont deux nouveaux chiffres à mettre à la suite de la racine, qui par-là devient 87390. Je quarre cette racine, et je retranche son quarré 7637012100, de la partie 7637035568 dont 87390 est la racine ; il me reste 23468.

Si je veux avoir de nouveaux chiffres à la racine ; comme j'en ai déja cinq, je puis, par la seule division, en trouver 4 ; je mettrai, pour cet effet, à la suite du reste 23468 les deux chiffres restants 23 du nombre proposé, et deux zéros, et divisant 2346823oo par le double 174780 de la racine trouvée, j'aurai 1342 pour les quatre nouveaux chiffres que je dois joindre à la racine : mais en partageant le nombre proposé, en tranches, de la maniere qui a été dite ci-dessus, on voit que sa racine ne doit avoir que six chiffres pour les nombres entiers ; donc cette racine est 873901,342, à moins d'un millieme près.

On peut, le plus souvent, pousser chaque division jusqu'à un chiffre de plus, c'est-à-dire, jusqu'à autant de chiffres qu'on en a déja à la racine ; mais il y a quelques cas, rares à la vérité, où l'erreur sur le dernier chiffre, pourroit aller jusqu'à cinq unités ; au lieu qu'en se bornant à un

chiffre de moins, comme nous venons de le faire, on n'a jamais à craindre, même une unité d'erreur sur le dernier chiffre.

Si après avoir trouvé les premiers chiffres de la racine, par la méthode ordinaire, ce qui reste après l'opération faite, se trouvoit égal au double de ces premiers chiffres, il faudroit, pour éviter tout embarras, en déterminer encore un par la même méthode ordinaire ; après quoi on trouveroit les autres par la méthode abrégée que nous venons d'exposer, qui, comme on le voit assez, s'applique également aux décimales.

Si la racine devoit avoir des zéros parmi ses chiffres intermédiaires, dans le cas où ces zéros seroient du nombre des chiffres qu'on détermine par la division, il peut arriver, s'ils doivent être les premiers chiffres du quotient, qu'on ne s'en apperçoive pas, parce que dans la division on ne marque pas les zéros qui doivent précéder sur la gauche du quotient ; le moyen de le distinguer est de faire attention qu'on doit avoir toujours autant de chiffres au quotient qu'on en a mis à la suite du reste ; et par conséquent, quand il y en aura moins, il en faudra compléter le nombre, par des zéros placés sur la gauche de ce quotient.

Au reste, l'abrégé que nous venons d'exposer, est une suite de ce principe général, qu'il est aisé de déduire de ce qu'on a vu (134) ; savoir, que le quarré d'une quantité quelconque composé de deux parties, renferme le quarré de la premiere partie, deux fois la premiere partie multipliée par la seconde, et le quarré de la seconde.

De la formation des Nombres cubes, et de l'extraction de leur Racine.

149. Pour former ce qu'on appelle *le cube* d'un nombre, il faut d'abord multiplier ce nombre par lui-même, et multiplier ensuite, par ce même nombre, le produit résultant de cette première multiplication.

Ainsi le cube d'un nombre est, à proprement parler, le produit du quarré d'un nombre, multiplié par ce même nombre : 27 est le cube de 3, parce qu'il résulte de la multiplication de 9 (quarré de 3) par le même nombre 3.

Le nombre que l'on cube est donc trois fois facteur dans le cube ; c'est pour cette raison que le cube est aussi nommé *troisième puissance* ou *troisième degré* de ce nombre.

150. En général, on dit qu'un nombre est élevé à la seconde, troisième, quatrième, cinquième, etc. puissance, quand on l'a multiplié par lui-même, 1, 2, 3, 4, etc. fois consécutives, ou lorsqu'il est 2 fois, 3 fois, 4 fois, 5, fois, etc. facteur dans le produit.

151. La *racine cubique* d'un cube proposé, est le nombre, qui, multiplié par son quarré, produit ce cube ; ainsi 3 est la racine cubique de 27.

152. On n'a donc pas besoin de règles pour former le cube d'un nombre ; mais pour revenir du cube à sa racine, il faut une méthode. Nous déduirons cette méthode de l'examen de ce qui se passe dans la formation du cube.

Observons cependant qu'on n'a besoin de méthode

pour extraire la racine cubique en nombres entiers, que lorsque le nombre proposé a moins de quatre chiffres; car 1000 étant le cube de 10, tout nombre au-dessous de 1000, et par conséquent de moins de quatre chiffres, aura pour racine moins que 10; c'est-à-dire, moins de deux chiffres.

Ainsi tout nombre qui tombera entre deux de ceux-ci,

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729;

aura sa racine cubique en nombre entier, entre les deux nombres correspondans de cette suite.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, dont la première contient les cubes.

153. Tout nombre n'a pas de racine cubique; mais on peut approcher continuellement d'un nombre qui, étant cubé, approche aussi de plus en plus de reproduire ce premier nombre; c'est ce que nous verrons après avoir appris à trouver la racine d'un cube parfait.

154. Voyons pour cet effet de quelles parties peut être composé le cube d'un nombre qui contiendroit des dixaines et des unités.

Puisque le cube résulte du quarré d'un nombre multiplié par ce même nombre, il est essentiel de se rappeller ici (134), que *le quarré d'un nombre composé de dixaines et d'unités, renferme*, 1.° *le quarré des dixaines*; 2.° *deux fois le produit des dixaines par les unités*; 3.° *le quarré des unités.*

Pour former le cube, il faut donc multiplier ces trois parties par les dixaines et par les unités du même nombre.

Afin d'appercevoir plus distinctement les produits qui en résulteront, donnons à cette opération simulée la forme suivante:

1.°

Le quarré des dixaines. Deux fois le produit des dixaines par les unités. Le quarré des unités	étant multiplié par les dixaines, donnera	Le cube des dixaines. Deux fois le produit du quarre des dixaines multiplié par les unités. Le produit des dixaines par le quarre des unités.

2.°

Le quarré des dixaines. Deux fois le produit des dixaines par les unités. Le quarré des unités	étant multiplié par les unités, donnera	Le produit du quarré des dixaines multiplié par les unités. Deux fois le produit des dixaines par le quarré des unités. Le cube des unités.

Donc en rassemblant ces 6 résultats, et réunissant ceux qui sont semblables, on voit que le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités, contient quatre parties ; savoir, *le cube des dixaines*, *trois fois le quarré des dixaines multiplié par les unités*, *trois fois les dixaines multipliées par le quarré des unités*, *et enfin le cube des unités.*

Formons d'après cela le cube d'un nombre composé de dixaines et d'unités, de 43, par exemple,

64000
14400
1080
27

79507

Nous prendrons donc le cube de 4 qui est 64 ; mais comme ce 4 est des dixaines, son cube sera des mille, parce que le cube de 10 est 1000 ; ainsi le cube des 4 dixaines sera 64000.

3 fois 16 ou 3 fois le quarré des 4 dixaines, étant multiplié par les 3 unités, donnera 144 centaines, parce que le quarré de 10 est 100 ; ainsi ce produit sera 14400.

3 fois 4 ou 3 fois les dixaines étant multipliées par le quarré 9 des unités, donneront des dixaines et ce produit sera 1080.

Enfin le cube des unités se terminera à la place des unités, et sera 27.

En réunissant ces quatre parties, on aura 79507 pour le cube de 43, cube qu'on auroit sans doute trouvé plus facilement, en multipliant 43 par 43, et le produit 1849 encore par 43; mais il ne s'agit pas tant ici de trouver la valeur du cube, que de reconnoître, par l'examen des parties qui le composent, la manière de revenir à sa racine.

155. Cela posé, voici le procédé de l'extraction de la racine cubique.

EXEMPLE.

Soit donc proposé d'extraire la racine cubique de 79507,

Cube.	*Racine.*
79.507	43
155.07	
48	

Pour avoir la partie de ce nombre qui renferme le cube des dixaines de la racine, j'en sépare les trois derniers chiffres, dans lesquels nous venons de voir que ce cube ne peut être compris, puisqu'il vaut des mille.

Je cherche la racine cubique de 79, elle est 4 que j'écris à côté.

Je cube 4, et j'ôte le produit 64, de 79, il me reste 15 que j'écris au-dessous de 79.

A côté de 15, j'abaisse 507, ce qui me donne 15507, dans lequel il doit y avoir 3 fois le quarré des quatre dixaines trouvées, multipliées par les unités que nous cherchons; plus, 3 fois ces mêmes dixaines multipliées par le quarré des unités; plus enfin le cube des unités.

Je sépare les deux derniers chiffres 07; la partie 155 qui reste à gauche, renferme 3 fois le quarré des dixaines, multiplié par les unités; c'est pourquoi, afin d'avoir les unités (74), je vais diviser cette partie 155, par le triple du quarré des 4 dixaines; c'est-à-dire, par 48.

Je trouve que 48 est 3 fois dans 155 ; j'écris donc 3 à la racine.

Pour éprouver cette racine, et connoître le reste, s'il y en a, nous pourrions composer les trois parties du cube qui doivent se trouver dans 15507, et voir si elles forment 15507, ou de combien elles en diffèrent; mais il est aussi commode de faire cette vérification, en cubant tout de suite 43 ; c'est-à-dire, en multipliant 43 par 43, ce qui produit 1849, et multipliant ce produit par 43, ce qui donne enfin 79507. Ainsi 43 est exactement la racine cubique.

Si le nombre proposé a plus de six chiffres, on raisonnera comme dans l'exemple ci-après.

EXEMPLE II.

Soit proposé d'extraire la racine cubique de 596947688.

596.947.688 | 842
849:47
192
592704

42436.88
21168
596947688

000000000

On considérera sa racine comme composée de dixaines et d'unités, et par cette raison on commencera par séparer les trois derniers chiffres.

La partie 596947 qui renferme le cube des dixaines, ayant plus de trois chiffres, sa racine en aura plus d'un, et par conséquent elle aura des dixaines et des unités : il faut donc pour trouver le cube de ces premières dixaines, séparer les trois chiffres 947.

Cela posé, je cherche la racine cubique de 596; elle est 8, j'écris ce 8 à côté.

Je cube 8, et je retranche le produit 512 de 596 ; il reste 84 que j'écris au-dessous de 596.

A côté de 84, j'abaisse 947, ce qui me donne 84947, dont je sépare les deux derniers chiffres.

Au-dessous de la partie 849, j'écris 192 qui est le triple quarré de la racine 8, et je divise 849 par 192; je trouve pour quotient 4, que j'écris à la racine.

Pour vérifier cette racine, et avoir en même-temps le reste, je cube 84, et je retranche le produit 592704, du nombre 596947; j'ai pour reste 4243.

A côté de ce reste, j'abaisse la tranche 688, et considérant la racine 84 comme un seul nombre qui marque les dixaines de la racine cherchée, je sépare les deux derniers chiffres 88 de la tranche abaissée, et je divise la partie 42436 par le triple quarré de 84, c'est-à-dire, par 21168, je trouve pour quotient 2, que j'écris à la suite de 84.

Pour vérifier la racine 842, et avoir le reste, s'il y en a, je cube 842; et je retranche le produit 596947688, du nombre proposé 596947688; et comme il ne reste rien, j'en conclus que 842 est la racine exacte de 596947688.

Il faut encore observer, 1.° que dans le cours de ces opérations, on ne doit jamais mettre plus de 9 à la racine.

2.° Si le chiffre qu'on porte à la racine étoit trop fort, on s'en appercevroit à ce que la soustraction ne pourroit se faire, et alors on diminueroit la racine successivement d'une, 2, 3, etc. unités, jusqu'à ce que la soustraction devînt possible.

Lorsque le nombre proposé n'est pas un cube parfait, la racine qu'on trouve n'est qu'une racine approchée, et il est rare qu'il soit suffisant de l'avoir en nombres entiers. Les décimales sont encore d'un usage très-avantageux pour pousser cette approximation beaucoup plus loin, et aussi loin qu'on le désire, sans que cependant on puisse jamais atteindre à une racine exacte.

156. Pour approcher aussi près qu'on le voudra de la racine cubique d'un cube imparfait, il faut mettre à la suite de ce nombre trois fois autant de zéros qu'on veut avoir de décimales à la racine; faire l'extraction comme dans les exemples précédens,

et après l'opération faite, séparer par une virgule sur la droite de la racine, autant de chiffres qu'on vouloit avoir de décimales.

EXEMPLE.

On demande d'approcher de la racine cubique de 8755 jusqu'à moins d'un centième près. Pour avoir des centièmes à la racine, il faut deux décimales ; il faut donc mettre six zéros à la suite de 8755.

Ainsi la question se réduit à tirer la racine cubique de 8755000000.

```
8.755.000.000|2061
07.55
12
8000
 7550.00
 1200
8741816
  131840.00
  127308
 8754552981
    447019
```

Suivant ce qui a été dit ci-dessus, je partage ce nombre, en tranches de trois chiffres chacune, en allant de droite à gauche.

Je tire la racine cubique de la dernière tranche 8 ; elle est 2 que j'écris à la racine. Je cube 2 et je retranche le produit, de 8 ; j'ai pour reste 0, à côté duquel j'abaisse la tranche 755, dont je sépare les deux derniers chiffres 55 : au-dessous de la partie restante 7, j'écris 12, triple quarré de la racine, et divisant 7 par 12, je trouve 0 pour quotient que j'écris à la racine.

Je cube la racine 20, ce qui me donne 8000 que je retranche de 8755 ; j'ai pour reste 755, à côté duquel j'abaisse la tranche 000, dont je sépare deux chiffres sur la droite ; au-dessous de la partie restante 7550, j'écris 1200 triple quarré de la racine 20, et divisant 7550 par 1200, je trouve pour quotient 6 que j'écris à la racine.

Je cube la racine 206, et je retranche le produit de 8755000 ; j'ai pour reste 13184, à côté duquel j'abaisse la dernière tranche 000, dont je sépare les deux derniers chiffres. Au-dessous de la partie restante 131840, j'écris

127308 triple quarré de la racine trouvée 206. Je divise 131840 par 127308 ; je trouve pour quotient 1 que j'écris à la suite de 206. Je cube 2061, et ayant retranché de 8755000000 le produit 8754552981 ; j'ai pour reste 447019.

La racine cubique approchée 8755000000 est donc 2061 ; mais comme 8755000000 est 1000000 fois plus grand que 8755, sa racine est 100 fois plus grande que celle de 8755, puisque 1000000 est le cube de 100 ; donc la racine cubique de 8755 est 20,61 (54)

Si l'on vouloit pousser l'approximation plus loin, on mettroit à la suite du reste trois zéros, et on continueroit comme on a fait à chaque fois qu'on a abaissé une tranche.

157. Puisque, pour multiplier une fraction par une fraction, il faut multiplier numérateur par numérateur, et dénominateur par dénominateur ; il faudra donc, pour cuber une fraction, cuber son numérateur et son dénominateur. Donc, réciproquement, pour extraire la racine cubique d'une fraction, il faudra extraire la racine cubique du numérateur, et la racine cubique du dénominateur. Ainsi la racine cubique de $\frac{27}{64}$ est $\frac{3}{4}$, parce que la racine cubique de 27 est 3, et celle de 64 est 4.

158. Mais si le dénominateur seul est un cube, on tirera la racine approchée du numérateur, et on donnera à cette racine pour dénominateur, la racine cubique du dénominateur.

Par exemple, si on demande la racine cubique $\frac{14\frac{1}{3}}{343}$; comme le numérateur n'est pas un cube, j'en tire la racine approchée, qui sera 5,22, à moins d'un centième près, et tirant la racine de 343 qui est 7, j'ai $\frac{5,22}{7}$ pour la racine approchée de $\frac{14\frac{1}{3}}{343}$, ou bien, en réduisant en décimales (92), j'ai 0,74 pour cette racine approchée à moins d'un centième près.

159. Si le dénominateur n'est pas un cube, on

multipliera les deux termes de la fraction par le quarré de ce dénominateur, et alors le nouveau dénominateur étant un cube, on se conduira comme il vient d'être dit.

Par exemple, si on demande la racine cubique de $\frac{3}{7}$, je multiplie le numérateur et le dénominateur par 49, quarré du dénominateur 7; j'ai $\frac{147}{343}$ qui (88) est de même valeur que $\frac{3}{7}$. La racine cubique de $\frac{147}{343}$ est $\frac{5.7}{7}$ ou en réduisant purement en décimale 0,75; la racine cubique de $\frac{3}{7}$ est donc 0,75, à moins d'un centième près.

S'il y avoit des entiers joints aux fractions, on convertiroit le tout en fraction, et l'opération seroit réduite à tirer la racine cubique d'une fraction. (157 *et suiv.*)

On pourroit aussi, soit qu'il y ait des entiers, soit qu'il n'y en ait point, réduire la fraction en décimales, mais il faut avoir soin de pousser cette réduction jusqu'à trois fois autant de décimales qu'on veut en avoir à la racine.

Ainsi, si l'on demandoit la racine cubique de $7\frac{3}{11}$, approchée jusqu'à moins d'un millième, on changeroit la fraction $\frac{3}{11}$ en 0,272727272, en sorte que, pour avoir la racine cubique de $7\frac{3}{11}$, on tireroit celle de 7,272727272, qu'on trouvera être 1,937.

160. Pour tirer la racine cubique d'un nombre qui aura des décimales, il faudra le préparer par un nombre suffisant de zéros mis à sa suite, de manière que le nombre de ses décimales soit ou 3 ou 6, ou 9, etc. alors on en tirera la racine comme s'il n'y avoit pas de virgule; et après l'opération faite, on séparera sur la droite de la racine, par une virgule, un nombre de chiffres qui soit le tiers du nombre des décimales de la quantité proposée; en sorte que si la racine n'avoit pas suffisamment de chiffres pour que cette règle eût son exécution, on y suppléeroit par des zéros placés sur la gauche de cette racine.

Ainsi pour tirer la racine cubique de 6,54, à moins d'un millième près, je mettrai 7 zéros, et je tirerai la racine cubique de 6540000000 qui sera 1870, j'en séparerai 3 chiffres, puisqu'il y a 9 décimales au cube, et j'aurai 1,870, ou simplement 1,87 pour la racine cubique de 6,54. On trouvera de même que celle de 0,0006 approchée à moins d'un centième près, est 0,08.

161. Quand on a trouvé les quatre premiers chiffres de la racine cubique, par la méthode qu'on vient d'expliquer, on peut trouver les autres plus promptement par la division, et cela de la maniere suivante.

Qu'on demande la racine cubique de..... 5264627832725456; j'en cherche les quatre premiers chiffres, par la méthode ordinaire; ils sont 1739, et le reste de l'opération est 5681413; à côté de ce reste, je mets les deux chiffres 72 qui suivent la partie 5264627832 qui a donné les quatre premiers chiffres. (Je mettrois les trois chiffres qui suivent cette même partie, si la racine trouvée avoit cinq chiffres, et les quatre, si elle en avoit six). Je divise 568141372 par 9072363, triple quarré de la racine 1739; j'ai pour quotient 62, et ce sont deux nouveaux chiffres à mettre à la suite de 1739, en sorte que 173962 est, en nombres entiers, la racine cubique du nombre proposé.

Si l'on vouloit pousser plus loin, on cuberoit cette racine, et ayant retranché le produit, du nombre proposé, on mettroit à la suite du reste quatre zéros, et on diviseroit le tout, par le triple du quarré de 173962, ce qui donneroit quatre décimales pour la racine.

On fera ici la même observation qu'on a faite (148) sur le cas où la division ne donne pas autant de chiffres qu'elle doit en donner. Et dans ces

divisions on s'aidera de la regle abrégée qui a été donnée (69 *et suiv.*)

Des Raisons, Proportions, et Progressions; et de quelques Règles qui en dépendent.

162. Les mots *raison* et *rapport* ont la même signification en Mathématiques, et l'un et l'autre expriment *le résultat de la comparaison de deux quantités.*

163. Si dans la comparaison de deux quantités, on a pour but de connoître de combien l'une surpasse l'autre, ou en est surpassée, le résultat de cette comparaison, qui est la différence de ces deux quantités, se nomme leur *Rapport Arithmétique.*

Ainsi, si je compare 15 avec 8, pour connoître leur différence 7, ce nombre 7 qui est le résultat de la comparaison, est le rapport arithmétique de 15 à 8.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue, on sépare l'une de l'autre par un point; en sorte que 15.8 marque que l'on considère le rapport arithmétique de 15 à 8.

164. Si dans la comparaison de deux quantités, on se propose de connoître combien l'une contient l'autre, ou est contenue en elle, le résultat de cette comparaison se nomme leur *Rapport Géométrique.*

Par exemple, si je compare 12 à 3, pour savoir combien de fois 12 contient 3, le nombre 4 qui exprime ce nombre de fois, est le rapport géométrique de 12 à 3.

Pour marquer que l'on compare deux quantités sous ce point de vue, on sépare l'une de l'autre par deux points.

Cette expression 12 : 3 marque qu'on considère le rapport géométrique de 12 à 3.

165. Des deux quantités que l'on compare, celle qu'on énonce ou qu'on écrit la première, se nomme *antécédent*, et la seconde se nomme *conséquent*.

Ainsi, dans le rapport 12:3, 12 est l'antécédent, et 3 est le conséquent ; et l'un et l'autre s'appellent les *termes* du rapport.

166. Pour avoir le rapport arithmétique de deux quantités, il n'y a donc autre chose à faire qu'à retrancher la plus petite de la plus grande.

167. Et pour avoir le rapport géométrique de deux quantités, il faut diviser l'une par l'autre.

168. Nous évaluerons ce rapport dorénavant, en divisant l'antécédent par le conséquent ; ainsi le rapport de 12 à 3 est 4, et le rapport de 3 à 12 est $\frac{3}{12}$ ou $\frac{1}{4}$.

169. Un rapport arithmétique ne change point quand on ajoute à chacun de ses deux termes, ou qu'on en retranche une même quantité, parce que la différence (en quoi consiste le rapport) reste toujours la même.

170. Un rapport géométrique ne change point quand on multiplie ou quand on divise ses deux termes par un même nombre ; car le rapport géométrique consistant (168) dans le quotient de la division de l'antécédent par le conséquent, est une quantité fractionnaire qui (88) ne peut changer par la multiplication ou la division de ses deux termes par un même nombre. Ainsi le rapport 3 : 12 est le même que celui 6 : 24 que l'on a en multipliant les deux termes du premier par 2, il est le même que celui de 1 : 4 que l'on a en divisant par 3.

171. Cette propriété sert à simplifier les rapports. Par exemple, si j'avois à examiner le rapport de $6\frac{3}{4}$ à $10\frac{2}{3}$, je dirois, en réduisant tout en fraction, ce rapport est le même que celui de $\frac{27}{4}$ à $\frac{32}{3}$, ou en réduisant au même dénominateur, le même que celui de $\frac{81}{12}$ à $\frac{128}{12}$, ou enfin, en supprimant le dénominateur 12, (ce qui revient au même que de multiplier les deux termes du rapport par 12), est le même que celui de 81 à 128.

172. Lorsque quatre quantités sont telles que le rapport des deux premières, est le même que le rapport des deux dernières, on dit que ces quatre quantités forment une *proportion*, et cette proportion est arithmétique ou géométrique, selon que le rapport qu'on y considère est arithmétique ou géométrique.

Les quatre quantités 7, 9, 12, 14, forment une proportion arithmétique, parce que la différence des deux premières est la même que celle des deux dernières.

Pour marquer que quatre quantités sont en proportion arithmétique, on les écrit ainsi 7 . 9 : 12 . 14, c'est-à-dire, qu'on sépare par un point les deux termes de chaque rapport ; et les deux rapports, par deux points. Le point qui sépare les deux termes de chaque rapport, signifie *est à ;* et les deux points qui séparent les deux rapports, signifient *comme ;* en sorte que pour énoncer la proportion ainsi écrite, on dit *7 est à 9, comme 12 est à 14.*

Les quatre quantités 3, 15, 4, 20, forment une proportion géométrique, parce que trois est contenu dans 15, comme 4 l'est dans 20.

Pour marquer qu'elles sont en proportion géométrique,

métrique, on les écrit ainsi 3 : 15 : : 4 : 20; c'est-à-dire, qu'on sépare les deux termes de chaque rapport, par deux points; et les deux rapports, par quatre points. Les deux points signifient *est à*, et les quatre points signifient *comme*; de sorte qu'on dit 3 *est à* 15, *comme* 4 *est à* 20.

Il faut seulement observer que, dans la proportion arithmétique, on fait précéder le mot *comme*, du mot *arithmétiquement*.

173. Le premier et le dernier terme de la proportion se nomment les *extrêmes*; le 2e et le 3e se nomment les *moyens*.

Comme il y a deux rapports, et par conséquent deux antécédens et deux conséquens, on dit, pour le premier rapport, *premier antécédent*, *premier conséquent*; et pour le second, *second antécédent*, *second conséquent*.

174. Quand les deux termes moyens d'une proportion sont égaux, la proportion se nomme *proportion continue*.

3.7 : 7.11 forment une proportion arithmétique continue; on l'écrit ainsi ÷ 3.7 : 11.; les deux points et la barre qui précèdent, sont pour avertir que dans l'énoncé on doit répéter le terme moyen qui est ici 7.

La proportion 5 : 20 : : 20 : 80 est une proportion géométrique continue, que par abréviation on écrit ainsi ÷÷5 : 20 : : 80; l'usage des quatre points et de la barre est le même que dans la proportion arithmétique continue.

175. Il suit de ce que nous venons de dire sur les proportions arithmétiques et géométriques :

1.° Que si dans une proportion arithmétique, on ajoute à chacun des antécédens, ou si on en retranche la différence ou raison qui règne dans cette proportion, selon que l'antécédent sera plus

petit ou plus grand que son conséquent, chaque antécédent deviendra égal à son conséquent; car c'est donner au plus petit terme de chaque rapport, ce qui lui manque pour égaler son voisin, ou retrancher du plus grand ce dont il surpasse son voisin.

Ainsi dans la proportion 3 . 7 : 8 . 12, ajoutez la différence 4 au premier et au troisième termes, vous aurez 7.7 : 12.12, et il est aisé de sentir que cela est général.

2.° Si dans une proportion géométrique vous multipliez chacun des deux conséquens par le rapport, vous les rendrez pareillement égaux chacun à son antécédent; car multiplier le conséquent par le rapport, c'est le prendre autant de fois qu'il est contenu dans l'antécédent.

Ainsi dans la proportion 12 : 3 : : 20 : 5, multipliez 3 et 5 chacun par 4, et vous aurez 12 : 12 : : 20 : 20; pareillement dans la proportion 15 : 9 : : 45 : 27, multipliez 9 et 27 chacun par $\frac{15}{9}$ ou $\frac{5}{3}$ qui est le rapport, vous aurez 15 : 15 : : 45 : 45.

Propriétés des Proportions Arithmétiques.

176. La propriété fondamentale des proportions arithmétiques, est que *la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens.*

Par exemple, dans cette proportion 3.7 : 8.12, la somme 3 et 12 des extrêmes, et celle 7 et 8 des moyens, font également 15.

Voici comment on peut s'assurer que cette propriété est générale.

Si les deux premiers termes étoient égaux entre eux, et les deux derniers égaux aussi entr'eux, comme dans cette proportion,

7 . 7 : 12 . 12.

il est évident que la somme des extrêmes seroit égale à celle des moyens.

Or, toute proportion arithmétique peut être ramenée à cet état (175), en ajoutant à chaque antécédent, ou en ôtant la différence qui règne dans la proportion. Cette addition qui augmentera également la somme des extrêmes et celle des moyens ne peut rien changer à l'égalité de ces deux sommes; ainsi, si elles deviennent égales par cette addition, c'est qu'elles étoient égales sans cette même addition. Le raisonnement est le même pour le cas de la soustraction.

177. Puisque dans la proportion continue, les deux termes moyens sont égaux, il suit de ce qu'on vient de démontrer, que dans cette même proportion, la somme des extrêmes est double du terme moyen, ou que le terme moyen est la moitié de la somme des extrêmes.

Ainsi, pour avoir un moyen arithmétique entre 7 et 15, par exemple; j'ajoute 7 à 15, et prenant la moitié de la somme 22, j'ai 11 pour le terme moyen, en sorte que $\div 7.11.15$.

Propriétés des Proportions Géométriques.

178. La propriété fondamentale de la proportion géométrique, est que *le produit des extrêmes est égal au produit des moyens;* par exemple, dans cette proportion 3 : 15 : : 7 : 35, le produit de 35 par 3, et celui de 15 par 7, sont également 105.

Voici comment on peut se convaincre, que cette propriété a lieu dans toute proportion géométrique.

Si les antécédens étoient égaux à leurs conséquens, comme dans cette proportion,

3 : 3 : : 7 : 7

il est évident que le produit des extrêmes seroit égal au produit des moyens.

Mais on peut toujours ramener une proportion à cet état (175), en multipliant les deux conséquens par la raison : cette multiplication fera, à la vérité, que le produit des extrêmes sera un certain nombre de fois plus grand qu'il n'auroit été, ou sera un certain nombre de fois plus petit, si le rapport est une fraction ; mais elle produira le même effet sur celui des moyens : donc, puisqu'après cette multiplication, le produit des extrêmes seroit égal au produit des moyens, ces deux produits doivent aussi être égaux sans cette même multiplication.

On peut donc prendre le produit des extrêmes pour celui des moyens, et réciproquement.

Concluons aussi que *dans la proportion continue, le produit des extrêmes est égal au quarré du terme moyen*, et que par conséquent on a le terme moyen en tirant la racine quarrée du produit des extrêmes.

Ainsi pour avoir un moyen proportionnel géométrique entre 4 et 9, je multiplie 4 par 9, et la racine quarrée 6 du produit 36, est le moyen proportionnel cherché.

179. De la propriété fondamentale de la proportion géométrique, il suit que si connoissant les trois premiers termes d'une proportion, on vouloit déterminer le quatrième, il faudroit *multiplier le second par le troisième, et diviser le produit par le premier ;* car si (74) on divisoit le produit des extrêmes par le premier terme qui est un extrême, il est évident qu'on auroit pour quotient le quatrième qui est l'autre extrême ; puis donc que le produit des moyens est la même chose que celui des extrêmes, en divisant le produit des

moyens par le premier terme, on aura donc le même quotient, c'est-à-dire, le quatrième terme.

Ainsi si on demande quel seroit le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers seroient 3 : 8 : : 12, je multiplie 8 par 12, ce qui me donne 96 que je divise par 3; le quotient 32 est le quatrième terme demandé; en sorte que 3,8,12,32 forment une proportion : en effet, le premier rapport est $\frac{3}{8}$, et le second est $\frac{12}{32}$ qui, (89) en divisant les deux termes par 4, est aussi $\frac{3}{8}$.

Par un semblable raisonnement, on voit qu'on peut trouver tout autre terme de la proportion, lorsqu'on en connoît trois. *Si le terme qu'on veut trouver est un des extrêmes, il faudra multiplier les deux moyens, et diviser par l'extrême connu : si au contraire on veut trouver un des moyens, il faudra multiplier les deux extrêmes, et diviser par le terme moyen connu.*

180. Cette propriété de l'égalité entre le produit des extrêmes et celui des moyens, ne peut appartenir qu'à quatre quantités en proportion géométrique. En effet, si l'on avoit quatre quantités qui ne fussent point en proportion géométrique; en multipliant les conséquens, par le rapport des deux premiers, il n'y auroit que le premier antécédent qui deviendroit égal à son conséquent; par exemple, si on avoit 3, 12, 5, 10, en multipliant les conséquens 12 et 10, par la raison $\frac{1}{4}$ des deux premiers termes 3 et 12, on auroit 3, 3, 5, $\frac{10}{4}$, dans lesquels il est évident que le produit des extrêmes ne peut être égal à celui des moyens; donc ces produits ne pourroient pas être égaux non plus quand même on n'auroit pas multiplié les conséquens par la raison $\frac{1}{4}$: il est visible que ce raisonnement peut s'appliquer à tous les cas.

Donc, *si quatre quantités sont telles que le pro-*

duit des extrêmes soit égal au produit des moyens ; ces quatre quantités sont en proportion. De là nous concluons cette seconde propriété des proportions.

181. *Si quatre quantités sont en proportion, elles y seront encore si l'on met les extrêmes à la place des moyens, et les moyens à la place des extrêmes.*

182. La même chose aura lieu ; c'est-à-dire, *que la proportion subsistera si on échange les places des extrêmes, ou celles des moyens.*

En effet, dans tous ces cas, il est aisé de voir que le produit des extrêmes sera toujours égal à celui des moyens.

Ainsi la proportion 3 : 8 :: 12 : 32 peut fournir toutes les proportions suivantes par la seule permutation de ses termes.

3 : 8 :: 12 : 32
3 : 12 :: 8 : 32
32 : 12 :: 8 : 3
32 : 8 :: 12 : 3
8 : 3 :: 32 : 12
8 : 32 :: 3 : 12
12 : 3 :: 32 : 8
12 : 32 :: 3 : 8

Et il en est de même de toute autre proportion.

183. Puisqu'on peut mettre le troisième terme à la place du second, et réciproquement, on doit en conclure, *qu'on peut, sans troubler une proportion, multiplier ou diviser les deux antécédens par un même nombre, et qu'il en est de même à l'égard des conséquens ;* car, en faisant cette permutation, les deux antécédens de la proportion donnée formeront le premier rapport, et les deux conséquens,

le second. Ainsi multiplier les deux antécédens de la premiere proportion, revient alors, à multiplier les deux termes d'un rapport, chacun par un même nombre, ce qui (170) ne change point ce rapport.

Par exemple, si j'ai la proportion 3 : 7 :: 12 : 28, je puis, en divisant les deux antécédens, par 3, dire 1 : 7 :: 4 : 28, parce que, de la proportion 3 : 7 :: 12 : 28, on peut (182) conclure 3 : 12 :: 7 : 28, et en divisant les deux termes du premier rapport par 3, 1 : 4 :: 7 : 28, qui (182) peut être changée en 1 : 7 :: 4 : 28.

184. *Tout changement fait dans une proportion, de manière que la somme de l'antécédent et du conséquent, ou leur différence, soit comparée à l'antécédent ou au conséquent, de la même manière, dans chaque rapport, formera toujours une proportion.*

Par exemple, si on a la proportion

12 : 3 :: 32 : 8

On en pourra conclure les proportions suivantes.

12 *plus* 3 : 3 :: 32 *plus* 8 : 8
ou 12 *moins* 3 : 3 :: 32 *moins* 8 : 8
ou 12 *plus* 3 : 12 :: 32 *plus* 8 : 32
ou 12 *moins* 3 : 12 :: 32 *moins* 8 : 32

Car, si c'est au conséquent que l'on compare, il est facile de voir que l'antécédent, augmenté ou diminué du conséquent, contiendra ce conséquent une fois de plus, ou une fois de moins qu'auparavant ; et comme cette comparaison se fait de la même manière pour le second rapport, qui, par la nature de la proportion, est égal au premier, il s'ensuit nécessairement que les deux nouveaux rapports seront aussi égaux entr'eux.

Si c'est à l'antécédent que l'on compare, le même raisonnement aura encore lieu, en concevant que dans la proportion sur laquelle on fait ce changement, on ait mis l'antécédent de chaque rapport à la place de son conséquent, et le conséquent à la place de l'antécédent; ce qui est permis (181).

185. Puisqu'en mettant le troisième terme d'une proportion à la place du second, et réciproquement, il y a encore proportion (182), on doit conclure que les deux antécédens se contiennent l'un l'autre, autant de fois que les conséquens se contiennent aussi l'un l'autre.

Donc *la somme des deux antécédens de toute proportion contient la somme des deux conséquens, ou est contenue en elle, autant qu'un des antécédens contient son conséquent, ou est contenu en lui.*

Par exemple, dans la proportion

12 : 3 :: 32 : 8

12 plus 32 : 3 plus 8 :: 32 : 8, ce qui est évident.

Mais pour s'en convaincre généralement, il n'y a qu'à faire attention que si le premier antécédent contient le second quatre fois, par exemple, la somme des deux antécédens contiendra le second cinq fois; et par la même raison, la somme des conséquens contiendra le second conséquent, 5 fois : donc la somme des antécédens contiendra celle des conséquens comme le quintuple d'un des antécédens contient le quintuple de son conséquent; c'est-à-dire, (170) comme un des antécédens contient son conséquent.

On prouveroit de même que la différence des antécédens est à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

186. Il est évident que la proposition qu'on vient de démontrer, revient à celle-ci; si on a deux rapports égaux,

Par exemple, celui de.....	4 : 12
et celui de.....	7 : 21
	11 : 33

On aura encore le même rapport, en ajoutant antécédent à antécédent, et conséquent à conséquent.

Donc, *si on a plusieurs rapports égaux, la somme de tous les antécédens est à la somme de tous les conséquens, comme l'un des antécédens est à son conséquent.*

Par exemple, si on a les rapports égaux 4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6, on peut dire que 4 *plus* 7 *plus* 2 sont à 12 *plus* 21 *plus* 6, comme 4 est à 12, ou comme 7 est à 21, etc.

Car après avoir ajouté entr'eux les antécédens des deux premiers rapports, et leurs conséquens aussi entr'eux, le nouveau rapport, qui, selon ce qu'on vient de voir, sera le même que chacun des deux premiers, sera aussi le même que le troisième; par conséquent, on pourra le combiner de même avec celui-ci, et il en résultera encore un rapport égal, et ainsi de suite.

187. On appelle *Rapport composé* celui qui résulte de deux ou d'un plus grand nombre de rapports, dont on multiplie les antécédens entr'eux et les conséquens entr'eux.

Par exemple, si on a les deux rapports 12 : 4 et 25 : 5, le produit des antécédens 12 et 25 sera 300, celui des conséquens 4 et 5 sera 20; le rapport de 300 à 20, est ce qu'on appelle *rapport composé des rapports de* 12 *à* 4 *et de* 25 *à* 5.

188. Ce rapport est le même que si l'on avoit évalué séparément chacun des rapports composans, et qu'on eût multiplié entr'eux les nombres qui expriment ces rapports; en effet, le rapport de 12 à 4 est 3, celui de 25 à 5 est 5; or 3 fois 5 font 15, qui est le rapport de 300 à 20, et on peut voir que cela est général, en faisant attention que le rapport est mesuré (168) par une fraction qui a l'antécédent pour numérateur, et le conséquent pour dénominateur; ainsi le rapport composé doit être une fraction, qui ait pour numérateur le produit des deux antécédens, et pour dénominateur le produit des deux conséquens : c'est donc (106) le produit des deux fractions qui expriment les rapports composans.

189. Si les rapports que l'on multiplie sont égaux, le rapport composé est dit *rapport doublé*, si on n'a multiplié que deux rapports; *rapport triplé*, si on en a multiplié trois; *quadruplé*, si on en a multiplié quatre, et ainsi de suite.

Par exemple, si l'on multiplie le rapport de 2 à 3, par celui de 4 à 6, qui lui est égal, on aura le rapport composé 8 : 18 qui sera dit rapport *double* du rapport de 2 à 3, ou de 4 à 6.

190. *Si l'on a deux proportions, et qu'on les multiplie par ordre, c'est-à-dire, le premier terme de l'une par le premier terme de l'autre; le second par le second, et ainsi de suite; les quatre produits qui en résulteront seront en proportion.*

Car en multipliant ainsi deux proportions, c'est multiplier deux rapports égaux par deux rapports égaux (172); donc les deux rapports composés qui en résultent doivent être égaux; donc les quatre produits doivent être en proportion (172).

191. Concluons de là que *les quarrés*, *les cubes*, *et en général les puissances semblables de quatre quantités en proportion*, *sont aussi en proportion*, puisque pour former ces puissances, il ne faut que multiplier la proportion par elle-même plusieurs fois de suite.

192. *Les racines quarrées*, *cubiques*, *et en général les racines semblables de quatre quantités en proportion*, *sont aussi en proportion ;* car le rapport des racines quarrées des deux premiers termes, n'est autre chose que la racine quarrée du rapport de ces deux termes (142 et 167); et il en est de même du rapport des racines quarrées des deux derniers termes ; donc, puisque les deux rapports primitifs sont supposés égaux, leurs racines quarrées sont égales ; donc, le rapport des racines quarrées des deux premiers termes sera égal au rapport des racines quarrées des deux derniers. On prouvera de même pour les racines cubique, quatrième, etc.

Usage des Propositions précédentes.

193. Les propositions que nous venons de démontrer, et qu'on appelle les *Règles des Proportions*, ont des applications continuelles dans toutes les parties des Mathématiques. Nous nous bornerons ici à celles qui appartiennent à l'Arithmétique, et nous commencerons par celle qu'on peut déduire de ce qui a été etabli (179), et qui est la base de presque toutes les autres.

De la Règle de Trois *directe et simple.*

194. On distingue plusieurs sortes de règles de *Trois ;* elles ont toutes pour objet de faire connoître

un terme d'une proportion dont on en connoît trois.

Celle qu'on appelle *Règle de Trois directe et simple*, est nommée *simple*, parce que l'énoncé des questions auxquelles on l'applique, ne renferme jamais plus de quatre quantités, dont trois sont connues, et la quatrième est à trouver.

On l'appelle *directe*, parce que des quatre quantités qu'on y considère, il y en a toujours deux qui, non-seulement sont relatives aux deux autres, mais qui en dépendent de manière que de même qu'une des quantités contient l'autre de même espèce, ou est contenue en elle, de même aussi la quantité relative à la première, contient la quantité relative à la seconde, ou est contenue en elle; c'est-à-dire, d'une manière plus abrégée, qu'une quantité et sa relative peuvent toujours être toutes deux ou antécédens ou conséquens dans la proportion; ce qui n'a pas lieu dans la regle de Trois inverse, comme nous le verrons dans peu.

La méthode, pour trouver le quatrieme terme d'une proportion, et par conséquent pour faire la regle de trois directe et simple, est suffisamment exposée (179); mais il est à propos de faire connoître, par quelques exemples, l'usage qu'on peut faire de cette regle.

EXEMPLE I.

40 Ouvriers ont fait, en un certain temps, 268 toises d'ouvrage; on demande combien 60 ouvriers en pourroient faire dans le même temps ?

Il est clair que le nombre des toises doit augmenter à proportion du nombre des ouvriers; en sorte que celui-ci devenant double, triple, quadruple, etc. le premier doit devenir aussi double, triple, quadruple, etc. Ainsi l'on voit que le nombre de toises cherché doit contenir les 268 toises, autant que le nombre 60 relatif au premier, con-

vient le nombre 40 relatif au second : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

$$40 : 60 :: 268^{t},$$

ou [en divisant ces deux premiers termes par 20, ce qui est permis (170)] par ces trois autres,

$$2 : 3 :: 268^{t} :$$

Ainsi, selon qu'il a été dit (179), je multiplie 268^{t} par 3, et je divise le produit 804 par 2, ce qui donne pour quotient 402^{t}, et par conséquent 402 toises pour l'ouvrage que feroient les 60 ouvriers.

EXEMPLE II.

Un navire a fait, avec le même vent, 275 lieues en 3 jours; on demande en combien de temps il en feroit 2000, toutes les autres circonstances demeurant les mêmes ?

Il est évident qu'il faut plus de temps, à proportion du nombre de lieues; et que, par conséquent, le nombre de jours cherché, doit contenir 3 jours, autant que 2000 lieues contiennent 275 lieues : il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci.....

$$275 : 2000 ; : 3 :$$

Multipliant 2000 par 3, et divisant le produit 6000 par 275, on auroit 21 jours $\frac{75}{111}$.

EXEMPLE III.

$52^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po}$ d'ouvrage ont été payées $168^{\#}\ 9^{s}\ 4^{d}$; on demande combien on doit payer pour $77^{t}\ 1^{pi}\ 8^{po}$?

Le prix de $77^{t}\ 1^{pi}\ 8^{po}$ doit contenir le prix $168^{\#}\ 9^{s}\ 4$ des $52^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po}$, autant que $77^{t}\ 1^{pi}\ 8^{po}$ contiennent $52^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po}$. Il faut donc chercher le quatrième terme d'une proportion qui ocmmenceroit par ces trois-ci,

$$52^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po} : 77^{t}\ 1^{pi}\ 8^{po} : : 168^{\#}\ 9^{s}\ 4^{d} :$$

c'est-à-dire, qu'il faut multiplier $168^{\#}\ 9^{s}\ 4^{d}$ par $77^{t}\ 1^{pi}\ 8^{po}$, et diviser le produit par $52^{t}\ 4^{pi}\ 5^{po}$, ce qu'on peut faire par ce qui a été dit (122 et 128).

Mais il sera encore plus simple de réduire les deux premiers termes à leur plus petite espèce, c'est-à-dire en pouces, et la question sera réduite à chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois autres,

3797 : 5564 : : 168^{tt} 9^{s} 4^{d} :

alors multipliant 168^{tt} 9^{s} 4^{d} par 5564, on aura 937348^{tt} 10^{s} 8^{d} ; et divisant par 3797, le quotient 246^{tt} 17^{s} 3^{d} $\frac{2780}{3797}$ sera ce qu'on doit payer pour les 77^{t} 12^{pi} 8^{po}.

S'il y avoit des fractions; après avoir réduit les deux termes de même espèce, à leur plus petite unité; comme dans cet exemple, on simplifieroit le rapport de ces deux termes de la manière qui a été enseignée (171),

De la Règle de Trois *inverse et simple.*

195. La règle de *Trois inverse et simple* diffère de la règle de Trois directe, dont nous venons de parler, en ce que, des quatre quantités qui entrent dans l'énoncé de la question pour laquelle on fait cette opération, les deux principales doivent se contenir l'une l'autre, dans un ordre tout opposé à celui des deux autres quantités qui lui sont relatives; en sorte que, lorsque par l'examen de la question, on a donné à ces quantités la disposition convenable pour former une proportion, l'une des deux quantités principales et sa relative forment les extrêmes, tandis que l'autre quantité principale et sa relative forment les moyens. Dans ce cas, on dit que les deux quantités principales sont *réciproquement proportionnelles* à leurs relatives.

Au reste, cela n'introduit aucune différence dans la manière de faire l'opération ; c'est toujours le quatrième terme d'une proportion qu'il s'agit de trouver, ou du moins on peut toujours amener la chose à ce point.

Quelques Arithméticiens ont prescrit pour le

cas présent, une règle assujettie à l'énoncé de la question; nous ne suivrons point leur exemple; c'est la nature de la question, et non pas son énoncé (qui souvent est vicieux) qui doit diriger dans la résolution.

EXEMPLE I.

30 hommes ont fait un certain ouvrage en 25 jours, combien faudroit-il d'hommes pour faire le même ouvrage en 10 jours? on voit qu'il faut, dans ce second cas, d'autant plus d'hommes que le nombre de jours est moindre; ainsi le nombre d'hommes cherché doit contenir le nombre de 30 hommes, autant que le nombre 25 de jours, relatif à ceux-ci, contient le nombre 10 de jours, relatif à ceux-là. Il ne s'agit donc que de trouver le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

10j : 25j :: 30hom.

c'est-à-dire, de multiplier 30 par 25, et de diviser le produit 750 par 10, ce qui donne 75 ou 75 hom.

EXEMPLE II.

Un Equipage n'a plus que pour 15 jours de vivres; mais les circonstances doivent lui faire tenir encore la mer pendant 20 jours, on demande à combien on doit réduire la totalité des rations, par jour?

Représentons par l'unité, la totalité des vivres que l'on consomme par jour; on voit que ce à quoi on doit se restreindre, doit être d'autant moindre que cette unité, que le nombre 20 des jours, pendant lesquels cette économie doit durer, est plus grand que le nombre de 15 jours; que, par conséquent, de même que 20 jours contiennent 15 jours, de même la totalité des vivres que l'on auroit consommés pendant chacun de ces 15 jours, doit contenir celle des vivres que l'on consommera pendant chacun des 20 jours: il faut

donc chercher le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par les trois suivants. . . . . .

20j : 15j : : 1 :

Ce quatrieme terme sera $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3}{4}$, il faut donc se réduire aux $\frac{3}{4}$ de ce qu'on auroit consommé par jour.

De la Règle de Trois *composée.*

196. Dans les deux règles de Trois que nous venons d'exposer, la quantité cherchée et la quantité de même espèce qui entre dans l'énoncé de la question, ont entr'elles un rapport simple et déterminé par celui des deux autres quantités qui entrent pareillement dans l'énoncé de la question.

Dans la règle de Trois composée, le rapport de la quantité cherchée à la quantité de même espèce qui entre dans l'énoncé de la question n'est pas donné par le rapport simple des deux autres quantités seulement, mais par plusieurs rapports simples qu'il s'agit de composer (187) d'après l'examen de la question.

Quand une fois ces rapports ont été composés, la règle est réduite à une règle de Trois simple; les exemples suivans vont éclaircir ce que nous venons de dire.

EXEMPLE I.

30 hommes ont fait 132 toises d'ouvrage en 18 jours ; combien 54 hommes en feront-ils en 28 jours ?

On voit que l'ouvrage dépend ici, non-seulement du nombre des hommes, mais encore du nombre des jours.

Pour avoir égard à l'un et à l'autre, il faut considérer que 30 hommes, travaillant pendant 18 jours, ne font qu'autant que dix-huit fois 30 hommes, c'est-à-dire, que 540 hommes qui travailleroient pendant un jour.

Pareillement, 54 hommes travaillant pendant vingt-huit jours, ne font qu'autant que feroient vingt-huit fois 54 hommes,

hommes, ou 1512 hommes travaillant pendant un jour.

La question est donc changée en celle-ci : 540 hommes ont fait 132 toises d'ouvrage, combien 1512 hommes en feroient-ils dans le même temps ? c'est-à-dire qu'il faut chercher le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci.

$$540^{h} : 1512^{h} :: 132^{t}.$$

Multipliant 1512 par 132, et divisant le produit par 540, on trouvera pour réponse à la question, $369^{t}\ 3^{pi}\ 7^{po}\ 2^{li}\ \frac{2}{5}$

EXEMPLE II.

Un homme marchant 7 heures par jour, a mis 30 jours à faire 230 lieues ; s'il marchoit 10 heures par jour, combien emploieroit-il de jours pour faire 600 lieues, allant toujours avec la même vîtesse ?

S'il marchoit pendant le même nombre d'heures par jour, dans chaque cas, on voit qu'il emploieroit d'autant plus de jours qu'il y a plus de chemin à faire ; mais comme il marche pendant un plus grand nombre d'heures chaque jour dans le second cas, il lui faudra moins de temps par cette raison ; ainsi l'opération tient en partie à la règle de Trois directe, et à la règle de Trois inverse.

On la réduira à une règle de Trois simple, en considérant que marcher pendant 30 jours, en employant 7 heures chaque jour, c'est marcher pendant 30 fois 7 heures ou 210 heures ; ainsi on peut changer la question en cette autre, il a fallu 210 heures pour faire 230 lieues, combien en faudra-t-il pour faire 600 lieues ! Quand on aura trouvé le nombre d'heures qui satisfait à cette question, en le divisant par 10 on aura le nombre de jours demandé, puisque l'homme dont il s'agit emploie dix heures par jour.

Ainsi il faut chercher le quatrième terme de la proportion, dont les trois premiers sont.

$$230^{l} : 600^{l} :: 210^{h}.$$

On trouvera que ce quatrième terme est 547 heures et $\frac{19}{23}$; lesquelles divisées par 10, nombre des heures que cet homme emploie chaque jour, donnent 54 jours et $\frac{47}{230}$ ou 54j $\frac{18}{23}$.

De la Règle de Société.

197. La règle de Société est ainsi nommée, parce qu'elle sert à partager, entre plusieurs associés, le bénéfice ou la perte résultant de leur société.

Son but est de partager un nombre proposé, en parties qui aient entr'elles des rapports donnés.

La règle que l'on donne pour cet effet, est fondée sur ce que nous avons établi (186); nous allons la déduire de ce principe dans l'exemple suivant.

EXEMPLE I.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de partager 120, en trois parties qui aient entr'elles les mêmes rapports que les nombres 4, 3, 2; l'énoncé de la question fournit ces deux proportions....

4 : 3 : : la premiere partie est à la seconde.

4 : 2 : : la premiere partie est à la troisieme.

Ou (182) ces deux autres. . . . . .

4 est à la premiere partie : : 3 est à la seconde.

4 est à la premiere partie : : 2 est à la troisieme.

De sorte qu'on a ces trois rapports égaux, 4 est à la premiere partie : : 3 est à la seconde : : 2 est à la troisieme.

Or, on a vu (186) que la somme des antécédens de plusieurs rapports égaux, est à la somme des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent; on peut donc dire ici, que la somme 9 des trois parties proportionnelles à celles que l'on cherche, est à la somme 120 de celles-ci, comme l'une quelconque des trois parties proportionnelles est à la partie de 120 qui lui répond.

La règle se réduira donc, 1.° à faire une totalité

des parties proportionnelles données : 2.° à faire autant de règles de Trois qu'il y a de parties à trouver, et dont chacune aura, pour premier terme, la somme des parties proportionnelles donnée, pour second terme le nombre proposé à diviser, et pour troisième terme l'une des parties proportionnelles données : ainsi dans la question que nous avons prise pour exemple, on auroit ces trois règles de Trois à faire,

$$9 : 120 :: 4 :$$
$$9 : 120 :: 3 :$$
$$9 : 120 :: 2 :$$

dont on trouvera (179) que les quatrièmes termes sont $53\frac{1}{3}$, 40, $26\frac{2}{3}$ qui ont entr'eux les rapports demandés, et qui composent en effet le nombre 120.

Mais il est aisé de remarquer qu'il n'est pas absolument nécessaire de faire autant de règles de Trois qu'il y a de parties à trouver : on peut se dispenser de la dernière, en retranchant du nombre proposé, la somme des autres parties quand on les a trouvées.

EXEMPLE II.

Trois personnes ont à partager le bénéfice de la prise d'un vaisseau. La premiere a fait un fonds de 20000^{ff}, la seconde de 60000^{ff}, la troisieme de 120000^{ff} ; on demande ce qui revient à chacune, sur la prise estimée 800000 liv. tous frais faits.

On voit qu'il s'agit de partager 800000^{ff}, en parties, qui aient entr'elles, les mêmes rapports que 20000, 60000, 120000, ou (170) que 2, 6, 12, puisque chacun doit avoir proportion-

nellement à sa mise ; il faut donc ajouter les trois parties proportionnelles 2, 6, 12, et faire les trois proportions suivantes, ou seulement deux.

20 : 800000 : : 2# : la premiere partie.
20 : 800000 : : 6# : la seconde partie.
20 : 800000 : : 12# : la troisieme partie.

Ces trois parties seront 800000#, 240000# ; 480000.

La question pourroit être plus compliquée, et cependant être ramenée aux principes, comme dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE III.

Trois personnes ont mis en société ; la premiere 3000#, qui ont été pendant six mois dans la société ; la seconde, 4000 qui y ont été pendant cinq mois ; et la troisieme, 8000# qui y ont resté pendant neuf mois ; combien chacun doit-il avoir sur le bénéfice qui monte à 12050#.

On réduira toutes les mises à un même temps, en cette maniere :

La mise de 3000# a dû produire pendant 6 mois, autant que 6 fois 3000 ou 18000#, pendant un mois.

La mise de 4000# a dû produire pendant 5 mois, autant que 5 fois 4000# ou 20000#, pendant un mois.

Enfin la mise de 8000# a dû produire en 9 mois, autant que 9 fois 8000# ou 72000, pendant un mois.

Ainsi la question est réduite à cette autre ; les mises des trois Associés sont 18000#, 20000#, 72000# ; combien revient-il à chacun sur le gain 12050#.

En procédant comme dans l'exemple ci-dessus, on trouvera 1971^{tt} 16^{s} 4^{d} $\frac{4}{11}$, 2190^{tt} 18^{s} 2^{d} $\frac{2}{11}$, 7887^{tt} 5^{s} 5^{d} $\frac{5}{11}$.

Remarque au sujet de la Regle précédente.

198. Il n'est pas inutile d'examiner un cas qui peut embarrasser les Commençans. Si l'on proposoit cette question, partager 650 en trois parties, dont la premiere soit à la seconde :: 5 : 4, et dont la premiere soit à la troisieme :: 7 : 3.

On ne peut pas appliquer ici la regle précédente, sans une préparation qui consiste à rendre la même, dans chaque rapport donné, la partie proportionnelle de l'une des trois parties cherchée ; par exemple, celle de la premiere : cela s'exécute aisément, en multipliant les deux termes de chaque rapport, par le premier terme de l'autre rapport ; ainsi les deux rapports 5 : 4 et 7 : 3, seront ramenés à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes du premier par 7, et les deux termes du second par 5, ce qui n'en change pas la valeur (170), et donne les rapports 35 : 28 et 35 : 15, en sorte que la question se réduit à partager 650, en trois parties qui soient entr'elles comme les nombres 35, 28 et 15 ; ce qui se fera aisément par la régle précédente.

Si l'on demandoit de partager un nombre en quatre parties, dont la premiere fût à la seconde :: 5 : 4, la premiere à la troisieme :: 9 : 5 ; et la premiere à la quatrieme :: 7 : 3 ; on réduiroit ces rapports à avoir un même premier terme, en multipliant les deux termes de chacun par le produit des premiers termes des deux

autres : ainsi dans cet exemple on changeroit ces trois rapports, en ces trois autres, 315 : 252, 315 : 175, 315 : 135; en sorte que la question se réduit à partager le nombre proposé, en quatre parties qui soient entr'elles comme les nombres 315, 252, 175 et 135.

De quelques autres Regles dépendantes des Proportions.

* 199. Quoique les regles suivantes soient d'un usage moins fréquent que les précédentes, nous ne pouvons cependant les omettre absolument : outre qu'elles ne sont pas sans utilité par elles-mêmes, elles sont d'ailleurs propres à faire sentir les usages des proportions.

200. La premiere dont nous parlerons, est la Regle *d'une fausse position*. On l'applique souvent à résoudre des questions, qui appartiennent à la regle de Société, dont elle différe en ce qu'au lieu de prendre les parties proportionnelles telles qu'elles sont données par l'énoncé de la question, elle en prend une arbitrairement, et y subordonne les autres conformément à la question; ce qui rend le calcul un peu plus facile.

EXEMPLE I.

Partager 640$^{\#}$, à trois personnes, dont la seconde ait le quadruple de la premiere, et la troisieme deux fois et $\frac{1}{3}$, autant que les deux autres ensemble.

Je prends arbitrairement, pour représenter la premiere partie, le nombre 3 dont je puis prendre commodément le $\frac{1}{3}$.

La premiere partie étant 3, la seconde sera 12, et la troisieme 35.

La question est réduite à partager 640, en trois parties qui soient entr'elles comme les trois nombres 3, 12 et 35, ce qui se fera comme il a été dit (197).

La regle de fausse position sert aussi à résoudre des questions qui sont, en quelque façon, l'inverse de celles de la regle de Société; puisqu'il s'agit de revenir de la somme de quelques parties d'un nombre, à ce nombre même, comme dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE II.

On demande de trouver un nombre dont le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et les $\frac{3}{7}$ fassent 808. Je prends un nombre dont je puisse avoir commodément le $\frac{1}{3}$, le $\frac{1}{5}$ et les $\frac{3}{7}$; (ce qui est facile en multipliant les trois dénominateurs). Ce nombre sera 105; j'en prends le $\frac{1}{3}$ qui est 35, le $\frac{1}{5}$ qui est 21, et les $\frac{3}{7}$ qui sont 45; j'ajoute ces trois nombres, et j'ai 101 qui est composé des parties de 105, de la même maniere 808 l'est de celles du nombre en question; donc le nombre en question doit avoir même rapport à 808, que 105 à 101; il doit donc être le quatrieme terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci.....

101 : 105 :: 808 :

Ce quatrieme terme est 840, dont 808 renferme en effet le $\frac{1}{3}$ le $\frac{1}{5}$ et les $\frac{3}{7}$.

201. La seconde regle dont nous parlerons, est celle de deux fausses positions.

Elle sert dans les questions où il s'agit de partager, non pas le nombre même proposé, mais seulement une partie de ce nombre, en parties proportionnelles à des nombres donnés; l'exemple suivant fera connoître la regle et son usage.

EXEMPLE III.

Il s'agit de partager 6954#, entre trois personnes, de maniere que la seconde ait autant que la premiere, et 54# de plus; et que la troisieme ait autant que les deux autres ensemble, et 78# de plus.

Sans les 54 et 78#, il est clair qu'il ne s'agiroit que de partager le nombre proposé, en parties proportionnelles aux nombres 1, 1 et 2; mais puisqu'il faut prélever sur la somme 54#, pour la seconde personne, et 54# plus 78# pour la troisieme; il est évident qu'il n'y a qu'une partie du nombre proposé, qu'on doit partager en parties proportionnelles à 1, 1 et 2: comme cette partie est facile à trouver dans l'exemple actuel, mais peut être plus difficile à appercevoir dans d'autres circonstances, on suit la méthode que voici.

Supposons, pour la premiere part, tel nombre que

nous voudrons, par exemple, 1#; la seconde part sera 1# plus 54#; c'est-à-dire, 55#; et la troisieme sera 1# plus 55# plus 78#; c'est-à-dire, 134 : la totalité de ces parts est 190#.

S'il n'eût été question que de partager en parties proportionnelles à 1, 1 et 2; la premiere part étant toujours supposée 1#, la seconde seroit 1#, la troisieme seroit 2#, et la totalité seroit 4, dont la différence avec 190#, c'est-à-dire, 186#, est ce qu'il faut prélever sur la somme proposée 6954#, ce qui la réduit à 6768; il reste donc à partager 6768# en parties proportionnelles à 1, 1 et 2, selon les regles ci-dessus; et ayant trouvé que la premiere partie est 1692#, on en conclura que les deux autres parts demandées sont 1746# et 3516#; en effet la totalité de ces trois parts est 6954#.

202. On trouve encore, chez les Arithméticiens, plusieurs autres regles qui ne sont autre chose que l'application des regles de Trois, à différentes questions, telles que les questions d'*Intérêt*, de *Change*, d'*Escompte*, etc.

Nous n'entrerons pas dans ces détails qui ne peuvent avoir de difficulté pour ceux qui, ayant bien saisi les principes établis ci-dessus, auront en même temps l'état de la question présent à l'esprit. Nous nous bornerons à un seul exemple.

Une personne a fait à un Marchand, un billet de 2854#, payable dans un an; elle vient acquitter son billet au bout de 7 mois, et le Marchand consent de diminuer, pour les 5 mois restants, les intérêts qui ont été compris dans le billet, à raison de 6 pour 100 pour 12 mois; on demande pour quelle somme le Marchand doit rendre ce billet.

Puisque 12 mois produisent 6 pour 100 d'intérêt, 7 mois ont dû produire un intérêt qu'on trouvera en cherchant le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers sont.....

12 : 7 : : 6 :

Ce quatrieme terme sera $\frac{42}{12}$ ou $3\frac{1}{2}$. Or, quand l'intérêt a été pris à 6 pour 100, on a compté pour 106#, ce qui ne valoit que 100; donc quand l'intérêt est à $3\frac{1}{2}$; on compte pour $103\frac{1}{2}$, ce qui ne vaut que 100; il faut donc actuellement que ce qui devoit être payé 106, ne soit plus payé que 103. Ainsi la somme cherchée

doit être le quatrieme terme d'une proportion, dont les trois premiers sont.....

$$106 : 103\tfrac{1}{2} : : 2854^{\#} :$$

Ce quatrieme terme qui est $2786^{\#}$ 13^{s} 9^{d} $\frac{30}{106}$ ou $\frac{15}{17}$, est la somme que le débiteur doit donner pour retirer son billet.

De la Regle d'Alliage.

203. Les questions qui appartiennent à cette regle, sont de deux sortes.

Dans l'une il s'agit de trouver la valeur moyenne de plusieurs sortes de choses, dont le nombre et la valeur particuliere de chacun, sont connus.

Dans la seconde, il s'agit de connoître les quantités de chaque espece de choses qui entrent dans un ou plusieurs mêlanges, lorsqu'on connoît le prix ou la valeur de chaque espece, et le prix ou la valeur totale de chaque mêlange.

Nous réservons les questions de la seconde sorte, pour servir d'application dans l'Algebre.

Quant aux questions de la premiere, voici la regle pour les résoudre.

Multipliez la valeur de chaque espece de choses, par le nombre des choses de cette espece; ajoutez tous les produits, et divisez la somme, par le nombre total des choses de toutes les especes.

EXEMPLE.

On emploie 200 Ouvriers, dont 50 sont payés à raison de 40 sous par jour, 70 à raison de 30 sous, 50 à raison de 25 sous : et 30 à raison de 20 sous; à combien chaque

Ouvrier revient-il par jour, l'un portant l'autre ?

50 Ouvriers à 40^{s} par jour font une dépense de. . . . . 2000^{s}
70 à 30^{s} 2100
50 à 25 1250
30 à 20 600

5950^{s}

La dépense des 200 Ouvriers est donc de 5950^{s} par jour; et par conséquent, (en divisant par 200), chaque Ouvrier revient, l'un portant l'autre, à 29^{s} 9^{d} par jour. Les autres questions de cette espece sont si faciles à résoudre d'après cet exemple, que nous croyons à propos de ne pas insister sur cette matiere.

Des Progressions Arithmétiques.

204. La Progression Arithmétique est une suite de termes, dont chacun surpasse celui qui le précède, ou en est surpassé, de la même quantité.

Par exemple cette suite.....
÷ 1. 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25, etc.

Est une Progression Arithmétique, parce que chaque terme y surpasse celui qui le précède d'une même quantité qui est ici 3.

Les deux points séparés par une barre qu'on voit ici à la tête de la progression, sont destinés à marquer, qu'en énonçant cette progression, on doit répéter chaque terme, excepté le premier et le dernier, en cette manière 1 *est à* 4, *comme* 4 *est à* 7 *comme* 7 *est à* 10, etc.

La progression est dite *croissante* ou *décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant: mais comme les propriétés de l'une et

de l'autre sont les mêmes, en changeant seulement les mots *plus* en *moins*, et *ajouter* en *soustraire*, nous la considérerons ici uniquement comme croissante.

205. On voit donc, d'après la définition de la Progression Arithmétique, qu'avec le premier terme et la différence commune, ou la raison de la progression, on peut former tous les autres termes, en ajoutant consécutivement cette raison, et que par conséquent ;

Le second terme est composé du premier plus la raison.

Le troisième, composé du second plus la raison, et par conséquent du premier plus deux fois la raison.

Le quatrième, est composé du troisième plus la raison, et par conséquent du premier plus trois fois la raison, et ainsi de suite.

206. De sorte qu'on peut dire en général *qu'un terme quelconque d'une progression arithmétique est composé du premier plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui.*

207. Donc, si le premier terme étoit zéro, tout autre terme de la progression seroit égal à autant de fois la raison qu'il y auroit de termes avant lui.

208. Ce principe peut avoir les deux applications suivantes :

1.° Il sert à trouver un terme quelconque d'une progression, sans qu'on soit obligé de calculer ceux qui le précèdent : qu'on demande, par exemple, quel seroit le 100e terme de cette progression.

$$\div\ 4 \cdot 9 \cdot 14 \cdot 19 \cdot 24, \text{ etc.}$$

Puisque ce terme cherché doit être le centième, il a donc 99 termes avant lui; il est donc composé

du premier terme 4 et de 99 fois la raison 5; il est donc 4 plus 495; c'est-à-dire, 499.

209. 2.° Ce même principe sert à lier deux nombres quelconques, par une suite de tant d'autres nombres qu'on voudra, de manière que le tout forme une progression arithmétique; ce qu'on appelle *insérer* entre deux nombres donnés, plusieurs *moyens proportionnels arithmétiques*, ou simplement plusieurs *moyens arithmétiques*.

Par exemple, on peut lier 1 et 7 par cinq nombres qui fassent une progression arithmétique avec 1 et 7; ces nombres sont 2, 3, 4, 5, 6; mais comme il n'est pas toujours aisé de voir, du premier coup-d'œil, quels doivent être ces nombres, voici comment on peut les trouver à l'aide du principe que nous venons de poser.

Il ne s'agit que de trouver la raison qui doit régner dans cette progression.

Or le plus grand des deux nombres proposés, devant être le dernier terme de la progression, doit être composé du premier, c'est-à-dire, du plus petit de ces deux nombres, plus autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui; donc si du plus grand de ces deux nombres on retranche le plus petit, le reste sera composé d'autant de fois la raison qu'il doit y avoir de termes avant le plus grand; c'est-à-dire, qu'il est le produit de la multiplication de cette raison par le nombre des termes qui précèdent le plus grand; donc (74) si on divise ce reste par le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, on aura cette raison.

Or le nombre des termes qui doivent précéder le plus grand, est plus grand d'une unité que le nombre des moyens qu'on veut insérer entre les

deux ; donc, *pour insérer entre deux nombres donnés tant de moyens arithmétiques qu'on voudra, il faut retrancher le plus petit de ces deux nombres, du plus grand, et diviser le reste par le nombre des moyens augmenté d'une unité.* Le quotient sera la différence ou la raison qui doit régner dans la progression.

Par exemple, si entre 4 et 11, on demande d'insérer 8 moyens arithmétiques ; je retranche 4 de 11, il me reste 7 que je divise par 9 nombre des moyens augmenté de l'unité ; le quotient $\frac{7}{9}$ est la différence qui doit régner dans la progression qui sera par conséquent $\div 4.4\frac{7}{9}.5\frac{5}{9}.6\frac{3}{9}.7\frac{1}{9}.7\frac{8}{9}.8\frac{6}{9}.9\frac{4}{9}.10\frac{2}{9}.11$.

Pareillement si l'on demandoit neuf moyens arithmétiques entre 0 et 1 ; retranchant 0 de 1, il reste 1 qu'il faudroit diviser par 10, nombre des moyens augmenté de l'unité, ce qui donne $\frac{1}{10}$ ou 0,1, pour la raison, et par conséquent la progression sera... $\div$ 0.0,1.0,2.0,3.0,4.0,5.0,6.0,7.0,8.0,9.1.

210. On voit par-là, qu'entre deux nombres, si voisins qu'ils puissent être l'un de l'autre, on peut toujours insérer tant de moyens arithmétiques qu'on voudra.

Nous n'en dirons pas davantage sur les progressions arithmétiques que nous nous ne traitons ici que par rapport aux logarithmes dont nous parlerons plus bas ; nous aurons occasion d'y revenir ailleurs.

Des Progressions Géométriques.

211. La Progression Géométrique est une suite de termes, dont chacun contient celui qui le précède, ou est contenu en lui, le même nombre de fois ; par exemple cette suite.....

$$\div\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192$$

Est une progression géométrique, parce que cha-

que terme contient celui qui le précède, le même nombre de fois qui est ici 2.

Ce nombre de fois est ce qu'on appelle *la raison* de la progression.

Les quatre points qui précèdent la progression, ont la même signification que les deux points qui précèdent la progression arithmétique (204). Mais on en met quatre pour avertir que la progression est géométrique.

La progression est dite *croissante ou décroissante*, selon que les termes vont en augmentant ou en diminuant.

Nous considérerons toujours la progression géométrique comme croissante, parce que les propriétés sont les mêmes dans l'une et dans l'autre, en changeant le mot de *multiplier* en celui de *diviser*, et celui de *contenir* en celui de *être contenu*.

Puisque le second terme contient le premier autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du premier multiplié par la raison.

Puisque le troisième terme contient le second autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du second multiplié par la raison, et par conséquent du premier multiplié par la raison, et encore multiplié par la raison, c'est-à-dire, du premier multiplié par le quarré, ou la seconde puissance de la raison.

Puisque le quatrième terme contient le troisième autant de fois qu'il y a d'unités dans la raison, il est donc composé du troisième multiplié par la raison, et par conséquent du premier multiplié par le quarré de la raison, et encore multiplié par la raison; c'est-à-dire, multiplié par le cube, ou la troisième puissance de la raison.

Par exemple, dans *la progression ci-dessus*, 6 est composé du premier terme 3, multiplié par la

raison 2 ; 12 est composé du premier terme 3, multiplié par le quarré 4 de la raison 2 ; 24 est composé du premier terme 3, multiplié par le cube 8 de la raison 2.

212. En continuant le même raisonnement, on voit qu'un *terme quelconque de la progression géométrique, est composé du premier multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précèdent ce terme quelconque.* Donc si le premier terme de la progression est l'unité, chaque autre terme sera formé de la raison même, élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précèdent; car la multiplication par le premier terme qui est l'unité, n'augmente point le produit.

Pour élever un nombre à une puissance proposée ; à la septième, par exemple, il faut, suivant l'idée que nous avons donnée des puissances, multiplier ce nombre par lui-même six fois consécutives ; ainsi pour élever 2 à la septième puissance, je dirois 2 fois 2 font 4, 2 fois 4 font 8, 2 fois 8 font 16, 2 fois 16 font 32, 2 fois 32 font 64, 2 fois 64 font 128, qui seroit la septième puissance de 2 ; mais on peut abréger l'opération en diverses manières ; par exemple, je puis d'abord quarrer 2, ce qui fait 4, cuber ce 4, ce qui donne 64, et le multiplier par 2, ce qui fait 128 ; ou bien je puis cuber 2, ce qui donne 8 ; quarrer 8, ce qui donne 64 ; et multiplier 64 par 2 ; ce qui donne 128 ; en un mot, peu importe de quelle façon on s'y prenne, pourvu que 2 se trouve 7 fois facteur dans le produit.

213. Le principe que nous venons de poser (212) sur la formation d'un terme quelconque de la progression, et la remarque que nous venons de faire, peuvent servir à calculer tel terme qu'on voudra de la progression, sans être obligé de calculer ceux qui le précèdent : si on demande, par exemple, quel seroit le douzième terme de la progression.....

∴ 3 : 6 : 12 : 24, etc.

Comme je sais (212) que ce douzième terme doit être composé du premier multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui précédent ce douzième; je vois que, pour le former, il faut multiplier 3 par la onzième puissance de la raison 2; pour former cette onzième puissance, je cube 2, ce qui me donne 8; je cube 8, ce qui me donne 512 pour la neuvième puissance; et enfin je multiplie 512, neuvième puissance de la raison, par 4, seconde puissance, et j'ai 2048 pour la onzième puissance de 2; je multiplie donc 2048 par 3, et j'ai 6144 pour le douzième terme de la progression.

214. Une autre application qu'on peut faire du même principe, c'est pour trouver tant de moyens proportionnels géométriques qu'on voudra entre deux nombres donnés. Si on demandoit trois moyens géométriques entre 4 et 64; avec un peu d'attention on voit que ces trois moyens géométriques sont 8, 16, 32; en effet, 4 : 8 : 16 : 32 : 64, forment une progression géométrique; mais si on proposoit d'autres nombres que 4 et 64, ou que l'on demandât tout autre nombre de moyens géométriques, on ne le trouveroit pas aussi facilement.

Or voici comment on peut les trouver en vertu du principe dont il s'agit.

La question se réduit à trouver la raison qui doit régner dans la progression, parce que, quand elle sera trouvée, on formera aisément les termes par des multiplications successives par cette raison.

Qu'il soit question, par exemple, de trouver neuf moyens géométriques entre 2 et 2048.

2048 sera donc le dernier terme d'une progression géométrique qui commence par 2, et qui doit avoir neuf

neuf termes entre le premier et le dernier; 2048 est donc composé du premier terme 2, multiplié par la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048; donc (69), si l'on divise 2048 par le premier terme, le quotient sera la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui doivent précéder 2048; donc, en cherchant quelle est la racine de cette puissance, on aura la raison: or cette puissance doit être la dixième, puisque devant y avoir neuf termes entre 2 et 2048, il y en a nécessairement dix avant 2048; donc il faut extraire la racine dixième du quotient qu'aura donné le plus grand nombre 2048, divisé par le plus petit 2.

215. Comme on peut faire le même raisonnement dans tous les cas, concluons donc en général que, *pour insérer entre deux nombres donnés, tant de moyens géométriques qu'on voudra, il faut diviser le plus grand de ces deux nombres par le plus petit, ce qui donnera un quotient; on extraira, de ce quotient, une racine du degré marquée par le nombre des moyens augmenté de l'unité.*

Ainsi, pour revenir à notre exemple, je divise 2048 par 2, ce qui me donne 1024, dont je cherche la racine dixième (*); elle est 2; donc la raison est 2; ainsi pour former les moyens en question

(*) Nous n'avons pas donné de méthode pour extraire la racine dixième d'un nombre; mais il en est de celle-ci comme de la racine quarrée et de la racine cubique. La racine quarrée ne doit avoir qu'un chiffre, lorsque le nombre proposé n'en a pas plus de 2; la racine cubique ne doit avoir qu'un chiffre, lorsque le nombre proposé n'en a pas plus de trois; pareillement la racine 10e n'aura jamais qu'un chiffre, tant que le nombre proposé n'en aura pas plus de 10; il en est de même pour les autres racines; la trentième, par exemple, n'aura qu'un chiffre, si le nombre proposé n'a pas plus de 30 chiffres; cela se démontre, comme on l'a fait pour la racine quarrée et la racine cubique.

je multiplie le premier terme 2, continuellement par la raison 2 ; et après avoir formé neuf moyens, je retombe sur 2048, comme on le voit ici. . . . ∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 : 2048.

Pareillement, si on demandoit de trouver quatre moyens géométriques entre 6 et 48, je diviserois 48 par 6, et du quotient 8 je tirerois la racine 5 ; comme 8 n'a pas de racine 5e exacte, on ne peut jamais assigner exactement en nombres, quatre moyens géométriques entre 6 et 48 ; mais on peut approcher de cette racine si près qu'on le voudra, par une méthode analogue à celles de la racine quarrée et de la racine cubique, que nous ferons connoître dans l'Algèbre. En attendant, il suffit qu'on conçoive, qu'il est possible de trouver un nombre qui, multiplié quatre fois de suite par lui-même approche de plus en plus de reproduire 8, et qu'il en est de même pour tout autre nombre et pour toute autre racine ; et de là nous conclurons qu'entre deux nombres quelconques, on peut toujours trouver tant de moyens géométriques qu'on voudra, soit exactement, soit par une approximation poussée à tel degré qu'on voudra, et c'est tout ce qu'il nous faut pour passer aux Logarithmes.

Des Logarithmes.

216. Les *Logarithmes* sont des nombres en progression arithmétique, qui répondent terme pour terme à une pareille suite de nombres en progression géométrique. Si on a, par exemple, la progression géométrique et la progression arithmétique suivantes,

∺ 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256, etc.
∴ 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15 . 17, etc.

Chaque terme de la suite inférieure est dit le

logarithme du terme qui est à pareille place dans la suite supérieure.

217. Un même nombre peut donc avoir une infinité de logarithmes différens, puisqu'à la même progression géométrique on peut faire correspondre une infinité de progressions arithmétiques différentes.

Comme nous ne considérons ici les logarithmes que par rapport à l'usage qu'on peut en faire dans les calculs numériques, nous ne nous arrêterons pas à considérer les différentes progressions géométriques et arithmétiques qu'on pourroit comparer entr'elles ; nous passons tout de suite à celles qu'on a considérées dans la formation des tables de logarithmes.

218. On a choisi pour progression géométrique, la progression décuple, et pour progression arithmétique la suite naturelle des nombres; c'est-à-dire, qu'on a choisi les deux progressions suivantes,

∺ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000
∺ 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6

219. Ainsi il sera toujours aisé de reconnoître quel est le logarithme d'un nombre exprimé par l'unité suivie de tant de zéros qu'on voudra; il a toujours autant d'unités qu'il y a de zéros à la suite de cette unité.

Nous n'enseignerons pas ici la méthode qu'on a suivie pour trouver les logarithmes des termes intermédiaires de la Progression décuple ; elle dépend de principes que nous ne pouvons exposer ici ; mais nous allons expliquer leur formation par une voie, qui à la vérité ne seroit pas la plus expéditive pour calculer ces logarithmes, mais qui suffit, tant pour concevoir cette formation, que pour rendre raison des

usages auxquels on emploie ces nombres artificiels.

220. D'après la définition que nous avons donnée des logarithmes, on voit que pour avoir le logarithme d'un nombre quelconque, de 3, par exemple, il faut que ce nombre puisse faire partie de la progression géométrique fondamentale. Or, quoiqu'on ne voit pas que 3 puisse faire partie de la progression géométrique ∷ 1 : 10 : 100, etc. cependant on voit que si, entre 1 et 10, on inséroit un très-grand nombre de moyens géométriques (214); comme on monteroit alors de 1 à 10 par des degrés d'autant plus serrés que le nombre de ces moyens seroit plus grand, il arriveroit de deux choses l'une, ou que quelqu'un de ces moyens se trouveroit être précisément le nombre 3, ou que du moins il s'en trouveroit deux consécutifs entre lesquels le nombre 3 seroit compris, et dont chacun différeroit d'autant moins de 3, que le nombre des moyens insérés seroit plus grand.

Cela posé, si l'on inséroit pareillement entre 0 et 1 autant de moyens arithmétiques qu'on a inséré de moyens géométriques entre 1 et 10, chaque terme de la progression géométrique ayant pour logarithme le terme correspondant de la progression arithmétique, on prendroit dans celle-ci, pour logarithme de 3, le nombre qui s'y trouveroit à pareille place que 3 se trouve dans la progression géométrique; ou si 3 n'étoit pas exactement quelqu'un des termes de celle-ci, on prendroit dans la progression arithmétique, le terme qui répondroit à celui de la progression géométrique, qui approche le plus du nombre 3.

C'est ainsi qu'on pourroit s'y prendre en effet;

si l'on n'avoit d'autres expédiens que ceux que peut fournir l'Arithmétique. Quoiqu'il en soit, c'est à cela que revient le calcul des logarithmes.

221. Il faut donc se représenter qu'ayant inséré 10000000 moyens géométriques entre 1 et 1, pareil nombre entre 10 et 100, pareil nombre entre 100 et 1000, etc. on a inséré aussi pareil nombre de moyens arithmétiques entre 0 et 1, pareil nombre entre 1 et 2, pareil nombre entre 2 et 3; qu'ayant rangé tous les premiers sur une même ligne, et tous les seconds au-dessous, on a cherché dans la première le nombre le plus approchant de 2, et on a pris dans la suite inférieure le nombre correspondant; qu'on a cherché de même dans la première, le nombre le plus approchant de 3, et qu'on a pris dans la suite inférieure le nombre correspondant; qu'on en a fait de même successivement pour les nombres 4, 5, 6, etc. qu'enfin ayant transporté dans une même colonne, comme on le voit dans la Table ci-jointe, les nombres 1, 2, 3, 4, 5, etc. on a écrit dans une colonne à côté, les termes de la progression arithmétique qu'on a trouvés correspondans à ceux-là, ou du moins à ceux qui en approchoient le plus; alors on aura l'idée de la formation des logarithmes, et de leur disposition dans les Tables ordinaires.

TABLE des Logarithmes des nombres naturels, depuis 1 jusqu'à 200.

Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.
0	[illegible]	30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243
1	0,0000 0	31	1,491362	61	1,785330	91	1,959041
2	0,3010	32	1,505150	62	1,792392	92	1,963788
3	0,477121	33	1,518514	63	1,799341	93	1,968483
4	0,6020	34	1,531479	64	1,806180	94	1,973128
5	0,6989	35	1,544068	65	1,812913	95	1,977724
6	0,7781 1	36	1,556 0	66	1,819544	96	1,982271
7	0,8450	37	1,568202	67	1,826075	97	1,986772
8	0,9030	38	1,579784	68	1,832509	98	1,991226
9	0,954242	39	1,591065	69	1,838849	99	1,995635
10	1,000000	40	1,602060	70	1,845098	100	2,000000
11	1,041	41	1,612784	71	1,851258	101	2,004321
12	1,079181	42	1,623249	72	1,857332	102	2,008600
13	1,11394	43	1,633468	73	1,863322	103	2,012837
14	1,1461	44	1,643453	74	1,869232	104	2,017033
15	1,17609	45	1,653213	75	1,875061	105	2,021189
16	1,204120	46	1,662758	76	1,880814	106	2,025306
17	1,230449	47	1,672098	77	1,886491	107	2,029384
18	1,255272	48	1,681241	78	1,892095	108	2,033424
19	1,278753	49	1,690196	79	1,897627	109	2,037426
20	1,301030	50	1,698970	80	1,903090	110	2,041393
21	1,322219	51	1,707570	81	1,908485	111	2,045323
22	1,342423	52	1,716003	82	1,913814	112	2,049218
23	1,361728	53	1,724276	83	1,919077	113	2,053078
24	1,380211	54	1,732394	84	1,924279	114	2,056905
25	1,397940	55	1,740363	85	1,929419	115	2,060698
26	1,414973	56	1,748188	86	1,934498	116	2,064458
27	1,431364	57	1,755875	87	1,939519	117	2,068186
28	1,447158	58	1,763428	88	1,94448	118	2,071882
29	1,462398	59	1,770852	89	1,949390	119	2,075547
30	1,477121	60	1,778151	90	1,954243	120	2,079181

Nombres	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.	Nombres.	Logarith.
120	2,079181	140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273
121	2,082785	141	2,149219	161	2,206826	181	2,257679
122	2,086360	142	2,152288	162	2,209515	182	2,260071
123	2,089905	143	2,155336	163	2,212188	183	2,262451
124	2,093422	144	2,158362	164	2,214844	184	2,264818
125	2,096910	145	2,161368	165	2,217484	185	2,267172
126	2,100371	146	2,164353	166	2,220108	186	2,269513
127	2,103804	147	2,167317	167	2,222716	187	2,271842
128	2,107210	148	2,170262	168	2,225309	188	2,274158
129	2,110590	149	2,173186	169	2,227887	189	2,276462
130	2,113943	150	2,176091	170	2,230449	190	2,278754
131	2,117271	151	2,178977	171	2,232996	191	2,281033
132	2,120574	152	2,181844	172	2,235528	192	2,283301
133	2,123852	153	2,184691	173	2,238046	193	2,285557
134	2,127105	154	2,187521	174	2,240549	194	2,287802
135	2,130334	155	2,190332	175	2,243038	195	2,290035
136	2,133539	156	2,193125	176	2,245513	196	2,292256
137	2,136721	157	2,195900	177	2,247973	197	2,294466
138	2,139879	158	2,198657	178	2,250420	198	2,296665
139	2,143015	159	2,201397	179	2,252853	199	2,298853
140	2,146128	160	2,204120	180	2,255273	200	2,301030

Les logarithmes renfermés dans cette Table n'ont que six chiffres après la virgule ; ils en ont sept dans les Tables ordinaires ; mais cette différence ne nuit en rien à l'usage que nous en ferons ci-après.

222. Remarquons au sujet des Tables des logarithmes, que le premier chiffre de la gauche de chaque logarithmes s'appelle la *Caractéristique*, parce que c'est par ce chiffre qu'on peut juger dans quelle décade est compris le nombre auquel appartient ce logarithme. Par exemple, si un nombre a pour caractéristique 3, je sais qu'il appartient à des mille, parce que le logarithme de 1000 est 3, et que celui de 10000 étant 4, tout nombre depuis 1000 jusqu'à 10000 ne peut avoir pour logarithme que 3 et une fraction ; il a donc 3 pour caractéristique, et les autres chiffres expriment cette fraction réduite en décimales.

Propriétés des Logarithmes.

223. Les propriétés des logarithmes, dont nous allons parler, sont, pour la plupart, particulières au système de logarithmes où la progression géométrique fondamentale commence par l'unité, et la progression arithmétique par zéro. Les usages que nous en conclurons ne seroient pas les mêmes, si les deux progressions, ou l'une des deux seulement, commençoient autrement: mais la considération de celles-ci est étrangère à notre objet.

Comparons donc, terme à terme, une progression géométrique quelconque, mais dont le premier terme soit l'unité, avec une progression arithmétique aussi quelconque, mais dont le premier terme soit zéro; par exemple, les deux progressions suivantes.....

÷ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243 : 729 : 2187 : 6561, etc.
— 0 . 4 . 8 . 12 . 16 . 20 . 24 . 28 . 32, etc.

Il suit de la nature et de la correspondance parfaite de ces deux progressions, qu'autant de fois la raison de la première a dû être facteur pour former l'un quelconque des termes de cette progression, autant de fois la raison de la seconde a dû être ajoutée pour former le terme correspondant de cette seconde; par exemple, dans le terme 2187, la raison 3 est sept fois facteur, et dans le terme 28, la raison 4 est contenue sept fois.

En effet, selon ce qui a été dit (206 et 212), la raison est facteur dans un terme quelconque de la première, autant de fois qu'il y a de termes avant celui-là; et dans la seconde, un terme quelconque est composé d'autant de fois la raison qu'il y a de termes avant lui. Or, il y a le même nombre de termes de part et d'autre; donc, etc.

Concluons de là qu'un terme quelconque de la progression géométrique, aura toujours pour correspondant dans la progression arithmétique, un terme qui contiendra la raison de celle-ci, autant de fois que la raison de l'autre est facteur dans ce terme de la progression géométrique.

224. Donc, *si l'on multiplie l'un par l'autre, deux termes de la progression géométrique, et si l'on ajoute en même temps les deux termes correspondans de la progression arithmétique, le produit et la somme seront deux termes qui se correspondront dans ces progressions.*

Car le produit sera formé de la raison autant de fois facteur qu'elle l'est, tant dans l'un des termes multipliés, que dans l'autre; et la somme des deux termes ajoutés, sera formée de la raison de la progression arithmétique ajoutée autant de fois qu'elle l'est, tant dans l'un des termes ajoutés, que dans l'autre; donc puisqu'on a pris des termes correspondans dans les deux progressions, la raison géométrique sera facteur dans le produit, autant que la raison arithmétique sera ajoutée à elle-même dans la somme; donc le produit et la somme se correspondront.

225. Donc on peut, par l'addition seule de deux termes de la progression arithmétique, connoître le produit des deux termes correspondans de la progression géométrique, en supposant ces deux progressions prolongées suffisamment.

Par exemple, en ajoutant les deux termes 8 et 24 qui répondent à 9 et 729, j'ai 32 qui répond à 6561; d'où je conclus que le produit de 729 par 9, est 6561, ce qui est en effet.

226. Donc, puisque les nombres naturels qui

composent la première colonne de la Table ci-dessus, ont été tirés d'une progression géométrique qui commence par l'unité, et puisque leurs logarithmes sont les termes correspondans d'une progression arithmétique, qui commence par zéro, il faut en conclure, qu'en *ajoutant les logarithmes de deux nombres, on a le logarithme de leur produit.*

De là il est aisé de conclure les usages suivans.

Usages des Logarithmes.

227. Pour faire une multiplication par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du multiplicande, au logarithme du multiplicateur; la somme sera le logarithme du produit: c'est pourquoi, cherchant cette somme parmi les logarithmes des Tables, on trouvera le produit à côté.

Par exemple, si l'on propose de multiplier 14 par 13.
Je trouve dans la petite Table ci-dessus, que le logarithme
de 14 est..... 1,146128
et que celui de 13 est..... 1,113943
La somme..... 2,260071
répond dans la même table au nombre 182, qui est en effet le produit.

228. Pour quarrer un nombre, il suffit donc de doubler son logarithme, puisqu'il faudroit ajouter ce logarithme à lui-même, pour multiplier le nombre par lui-même.

229. Par une raison semblable, pour cuber un nombre, il faut tripler son logarithme, et en général, pour élever un nombre à une puissance quelconque, il faudra prendre son logarithme autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque cette puissance; c'est-à-dire, multiplier son logarithme par le nombre qui marque cette

puissance ; par exemple, pour élever un nombre à la septième puissance, il faudra multiplier par 7 le logarithme de ce nombre.

230. Donc, pour extraire la racine quarrée, cubique, quatrième, etc. d'un nombre proposé, il faudra diviser le logarithme de ce nombre par 2, 3, 4, etc. c'est-à-dire, en général par le nombre qui marque le degré de la racine qu'on veut extraire.

Par exemple, si l'on demande la racine quarrée de 144, ayant trouvé dans la table que le logarithme de ce nombre est 2,158362, j'en prends la moitié 1,079181; je cherche parmi les logarithmes, à quel endroit se trouve 1,079181; il répond à 12, qui est par conséquent la racine quarrée de 144.

Si l'on demande la racine septième de 128, je cherche dans la table son logarithme, que je trouve être 2,107210; j'en prends le septième, ou je le divise par 7, et je cherche à quoi répond dans la table le quotient 0,301030, il répond à 2, qui est en effet la racine septième de 128.

231. Pour trouver le quotient de la division d'un nombre par un autre, il faut retrancher le logarithme du diviseur, du logarithme du dividende, chercher dans la table à quel nombre répond le logarithme restant; ce nombre sera le quotient.

Par exemple, si l'on veut diviser 187 par 17, je cherche, dans la Table, les logarithmes de ces deux nombres, et je trouve...

Le logarithme de 187.....	2,271842
Celui de 17.....	1,230449
La différence.....	1,041393

répond, dans la Table, à 11 qui est en effet le quotient.

Si la division ne pouvoit pas être faite exactement, le logarithme restant ne se trouveroit qu'en partie dans la Table; mais nous allons enseigner ci-après ce qu'il faut faire dans ce cas.

La raison de cette règle est fondée, sur ce que le quotient multiplié par le diviseur, devant reproduire le dividende (74), le logarithme du quotient ajouté (227) au logarithme du diviseur, doit donc composer le logarithme du dividende, et par conséquent le logarithme du quotient vaut le logarithme du dividende, moins celui du diviseur.

232. D'après ce que nous venons de dire, il est très-facile de voir, que, pour faire une règle de Trois par logarithmes, il faut ajouter le logarithme du second terme, au logarithme du troisième, et de la somme retrancher le logarithme du premier.

233. Remarquons que, quand on cherche dans les Tables ordinaires un logarithme résultant de quelques opérations sur d'autres logarithmes, si l'on ne trouve qu'une unité de différence entre le dernier chiffre de ce logarithme, et celui de la Table, on doit regarder cette différence comme nulle, parce que les logarithmes de tous les nombres intermédiaires à la progression décuple, ne sont qu'approchés à environ une demi-unité décimale du septième ordre près.

Des Nombres dont les Logarithmes ne se trouvent point dans les Tables.

234. Les fractions et les nombres entiers joints à des fractions, n'ont pas leurs logarithmes dans les tables; il en est de même des racines quarrées, cubiques, etc. des nombres qui ne sont pas des puissances parfaites du degré de ces racines.

Si l'on demande le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, il faut d'abord réduire le tout

en fractions, (89) et ensuite retrancher le logarithme du dénominateur, du logarithme du nouveau numérateur.

Par exemple, pour avoir le logarithme de $8\frac{3}{11}$, je cherche celui de $\frac{91}{11}$, que je trouve en retranchant 1,041393, logarithme de 11, de 1,959041 logarithme de 91 ; le reste 0,917648 est le logarithme de $8\frac{3}{11}$, puisque $8\frac{3}{11}$ ou $\frac{91}{11}$, n'est autre chose que 91 divisé par 11 (96).

Si la fraction qui accompagne l'entier étoit une fraction décimale, l'opération se réduiroit à chercher le logarithme, sans aucune attention à la virgule qui sépare les décimales dans le nombre proposé, et on retrancheroit de la caractéristique de ce logarithme, autant d'unités qu'il y avoit de chiffres décimaux dans ce même nombre proposé.

Par exemple, si on demande le logarithme de 1,53, je prends le logarithme de 153, qui est 2,184691 ; mais comme ce logarithme appartient à un nombre 100 fois plus grand que 1,53, je retranche de sa caractéristique 2 unités, qui sont le logarithme de 100, ce qui (216) correspond à la division par 100; et j'ai 0,184691 pour le logarithme de 1,53.

235. La même raison prouve que, pour avoir le logarithme d'une fraction, il faut retrancher pareillement le logarithme du dénominateur, du logarithme du numérateur ; mais comme cette soustraction ne peut se faire, puisque le logarithme du dénominateur sera plus grand que celui du numérateur, on retranchera au contraire le logarithme du numérateur, de celui du dénominateur ; le reste, qui marquera ce dont il s'en faut que la soustraction n'ait pu se faire, sera le logarithme de la fraction, en appliquant à ce reste un signe qui marque que la soustraction n'a pas été entièrement

faite. Ce signe est celui-ci —, qu'on énonce *moins*. Ainsi le logarithme de la fraction $\frac{11}{12}$ seroit
—0,917648. (*)

236. Ce signe est destiné à rappeller dans le calcul, que les logarithmes des fractions doivent être employés selon une règle toute opposée à celle que nous avons prescrite pour les logarithmes des nombres entiers, ou des nombres entiers joints à des fractions; c'est-à-dire, que si l'on a à multiplier par une fraction, il faut retrancher le logarithme de cette fraction, si au contraire l'on a à diviser par une fraction, il faut ajouter son logarithme.

La raison en est, pour la multiplication, que multiplier par une fraction, revient à multiplier par le numérateur, et à diviser ensuite par le dénominateur; donc, lorsqu'on opère par logarithmes, on doit ajouter le logarithme du numérateur, et retrancher ensuite celui du dénominateur, ou, ce qui revient au même, on doit seulement retrancher l'excès du logarithme du dénominateur sur le logarithme du numérateur : or, cet excès est précisément le logarithme de la fraction.

A l'égard de la division, la raison en est aussi facile à saisir; en effet, diviser par $\frac{3}{4}$, par exemple, revient (109) à multiplier par $\frac{4}{3}$; donc, en opérant par logarithmes, il faut ajouter le logarithme de $\frac{4}{3}$; c'est-à-dire, (234) la différence du logarithme de 4, au logarithme de 3, ou du logarithme du dénominateur de la fraction proposée au logarithme de son numérateur.

(*) Les Nombres précédés du signe — se nomment nombres *négatifs*. Nous les ferons connoître dans l'Algèbre: en attendant, nous prevenons que c'est en prendre une idée fausse, que de les regarder comme des nombres au dessous de zéro. Il n'y a rien au-dessous de zéro.

237. Il peut arriver, et il arrive assez souvent, qu'en convertissant en une seule fraction, l'entier et la fraction dont on cherche le logarithme, il peut arriver, dis-je, que le numérateur soit un nombre qui passe les limites des Tables.

Par exemple, si l'on demande le logarithme de $53\frac{721}{7704}$, ce nombre réduit en fractions revient à $\frac{409321}{7704}$, dont le numérateur passe les limites des Tables les plus étendues.

Il est donc à propos de savoir comment on peut trouver en général le logarithme d'un nombre qui passe ces limites.

La méthode que nous allons donner, n'est pas rigoureuse, mais elle est plus que suffisante pour les usages ordinaires. Avant que de l'exposer, observons :

238. 1.° Qu'en ajoutant 1, 2, 3, etc. unités à la caractéristique du logarithme d'un nombre, on multiplie ce nombre par 10, 100, 1000, etc. puisque c'est ajouter le logarithme de 10, ou de 100, ou de 1000, etc. (219 et 227).

2.° Au contraire, si l'on retranche 1, 2, 3, etc. unités de la caractéristique d'un logarithme, c'est diviser le nombre correspondant par 10, 100, 1000, etc.

239. Cela posé, qu'il soit question de trouver le logarithme de 357859, par exemple.

Je séparerai, par une virgule, sur la droite de ce nombre, autant de chiffres qu'il est nécessaire, pour que le reste puisse se trouver dans les tables (*) Ici, par exemple, j'en

(*) Nous supposons ici que l'on ait entre les mains des Tables ordinaires des logarithmes. On en trouvera dans le *Traité de Navigation*, qui fait le sixieme volume de ce Cours. Celles de

séparerai deux, ce qui me donnera 3578,59, qui (18) est 100 fois plus petit que le nombre proposé 357859.

Je cherche dans les Tables le logarithme de 3578, que je trouve être 3,5536403, je prends en même temps à côté de ce logarithme (*) la différence 1214, entre ce même logarithme et celui de 3579, après quoi je fais cette règle de Trois. Si pour une unité de différence entre les deux nombres 3579 et 3578,

On a 1214 de différence entre leurs logarithmes,

Combien pour 0,59, différence entre les deux nombres 3578,59 et 3578,

Aura-t-on de différence entre leurs logarithmes ? c'est-à-dire, que je cherche le quatrième terme d'une proportion, dont les trois premiers sont.....

1 : 1214 : : 0,59 :

Ce quatrième terme est 716,26, ou simplement 716, en négligeant les décimales; j'ajoute donc 716 au logarithme 8,5536,3 de 3578, et j'ai 2,5537119 pour logarithme de 3578,59 : il ne s'agit plus, pour avoir celui de 357859, que d'ajouter deux unités à la caractéristique du logarithme qu'on vient de trouver, et on aura 5,5537119 pour le logarithme cherché, puisque 357859 est 100 fois plus grand que 3578,59.

Si les chiffres qu'on doit séparer sur la droite étoient tous des zéros, après avoir trouvé dans les Tables le logarithme de la partie qui reste à gauche, il n'y auroit autre chose à faire, qu'à ajouter autant d'unités à la caractéristique qu'on auroit séparé de zéros.

240. S'il s'agit du logarithme d'un nombre accompagné de décimales, on cherchera ce logarithme, comme si le nombre proposé n'avoit point de virgule; et après l'avoir trouvé, soit immédiatement dans les tables, soit par la méthode qu'on vient de donner (239), on ôtera autant d'unités à la caractéristique, qu'il y a de décimales dans le nombre proposé, parce

---

de M. Rivard et celles de Feu M. l'Abbé de la Caille, sont exactes et commodes.

(*) Ces différences se trouvent dans les Tables à côté des logarithmes mêmes.

qu'ayant

qu'ayant considéré le nombre, comme s'il n'avoit point de virgule ; c'est-à-dire, comme 10, ou 100, ou 1000, etc. fois plus grand qu'il n'est, on doit le rappeller à sa valeur par une diminution convenable sur la caractéristique de son logarithme (238).

241. Enfin, s'il n'y a que des décimales dans le nombre proposé, on cherchera encore ce nombre dans les tables, comme s'il n'avoit pas de virgule ; et, ayant pris la logarithme correspondant, on le retranchera d'autant d'unités qu'il y a de décimales dans ce même nombre, et on fera précéder le reste du signe — ; par exemple, pour avoir le logarithme de 0,03, je cherche celui de 3, qui est 0,477121 ; je le retranche de deux unités, et appliquant au reste le signe —, j'ai — 1,522879 pour logarithme de 0,03. En effet, 0,03 n'est autre chose que $\frac{3}{100}$; or, pour avoir le logarithme de $\frac{1}{100}$, il faut (235) retrancher le logarithme de 3, de celui de 100, et appliquer au reste le signe —.

Des Logarithmes dont les Nombres ne se trouvent point dans les Tables.

242. Cette recherche n'est pas moins nécessaire que la précédente. Par exemple, pour la division, il arrive rarement que le quotient soit un nombre entier ; or, si l'on fait l'opération par logarithmes, on ne trouvera dans les tables, le logarithme restant ; que quand le quotient sera un nombre entier : il y a une infinité d'autres cas de la même espèce.

243. Proposons-nous d'abord de trouver à quel

nombre répond un logarithme proposé, soit qu'il excède les limites des Tables, soit qu'il tombe entre les logarithmes des Tables.

On retranchera de la caractéristique autant d'unités qu'il sera nécessaire, pour qu'on puisse trouver, dans les Tables, les premiers chiffres du logarithme proposé, ainsi préparé. Si tous les chiffres se trouvent alors dans les Tables, le nombre cherché sera le nombre même qu'on trouve à côté dans les Tables, mais en mettant à sa suite autant de zéros qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique (238).

Par exemple, le logarithme 7,2273467 se trouve (après avoir ôté trois unités à la caractéristique) répondre au nombre 16879; j'en conclus que le logarithme proposé 7,2273467, répond à 16879000.

Si l'on ne trouve dans les Tables que les premiers chiffres du logarithme, on se conduira comme dans l'exemple qui suit.

Pour trouver à quel nombre appartient le logarithme 5,2432768, j'ôte deux unités à sa caractéristique; le logarithme 3,2432768 que j'ai alors, tombe entre les logarithmes de 1750 et 1751; le nombre auquel il répond est donc 1750 et une fraction.

Afin d'avoir cette fraction, je retranche de mon logarithme 3,2432768, le logarithme de 1750, et j'ai pour différence 2388.

Je prends aussi dans les Tables la différence 2481 entre les logarithmes de 1751 et 1750, après quoi je fais cette règle de Trois.

Si 2481 de différence entre les logarithmes de 1751 et 1750,

Répondent à 1 unité de différence entre ces nombres,

A quelle différence de nombres doit répondre la différence 2388 entre mon logarithme et celui de 1750:

Je trouve pour quatrième terme $\frac{2388}{2481}$; ainsi le logarithme 3,2432768 appartient au nombre 1750 $\frac{2388}{2481}$, à très-peu de chose près; par conséquent, le logarithme proposé qui appartient à un nombre 100 fois plus grand (238) a pour nombre correspondant 175000$\frac{238800}{2481}$, c'est-à-dire 175092 $\frac{468}{2481}$, ou en réduisant en décimales, il a pour nombre correspondant 175092,22.

244. Si le logarithme proposé tomboit entre ceux des Tables, il n'y auroit aucune unité à re-

trancher à la caractéristique, et par conséquent point de zéros à ajouter à la fin de l'opération, qu'on feroit d'ailleurs de la même manière.

245. Mais comme la proportion que nous employons dans cette méthode n'est pas rigoureusement exacte (*), et qu'elle n'approche de la vérité, qu'autant que les nombres cherchés sont grands; si le logarithme proposé tomboit au-dessous de celui de 1500, il faudroit, pour plus d'exactitude, ajouter à sa caractéristique autant d'unités qu'on pourroit le faire sans passer les bornes des Tables; et ayant trouvé le nombre qui approche le plus d'y répondre dans les Tables, on en sépareroit sur la droite autant de chiffres par une virgule, qu'on auroit ajouté d'unités à la caractéristique, ce qui suffira le plus souvent; mais si l'on veut avoir plus de décimales, on fera la proportion comme ci-dessus (243), et réduisant le quatrième terme en décimales, on mettra celle-ci à la suite de celles qu'on a déjà trouvées.

Par exemple, si l'on demande à quel nombre appartient le logarithme 0,5432725; comme ce logarithme tombe entre ceux de 3 et de 4, et que le nombre auquel il appartient, est par conséquent beaucoup au-dessous de 1500, je cherche ce logarithme avec trois unités de plus à sa caractéristique, c'est-à-dire, que je cherche 3,5432725; je trouve qu'il tombe entre les logarithmes de 3493 et 3494, d'où je conclus que le nombre cherché est 3,493, à moins d'un millième près. Mais si cette approximation ne suffit pas, je prendrai la différence entre mon logarithme et celui de 3493, c'est-à-dire 7395 je prendrai pareillement la différence 1243 entre les logarithmes de 3494 et 3493, et je

(*) Cette proportion suppose que les différences des logarithmes sont proportionnelles aux différences des nombres, ce qui n'est jamais exactement vrai, mais approche assez, quand les nombres sont un peu grands, et cela suffit pour les usages ordinaires.

chercherai en raisonnant comme ci-dessus (243) le quatrième terme d'une proportion qui commenceroit par ces trois-ci,

1243 : 1 : : 739 :

Ce quatrième terme évalué en décimales, est 0,594 ; donc le nombre cherché est 3,493594.

Au reste, cette seconde approximation est bornée, parce que les logarithmes des Tables n'étant exacts qu'à environ une demi-unité décimale du septième ordre près, les différences sont affectées de ce léger défaut ; mais on peut toujours pousser l'approximation avec confiance, jusqu'à trois décimales : au surplus, il est rare qu'on ait besoin d'aller jusque-là. La remarque que nous faisons, doit diriger aussi dans l'usage que nous avons fait ci-dessus (239 et 243) de la même proportion.

246. Si on veut avoir la fraction à laquelle répond un logarithme négatif proposé, on retranchera ce logarithme de 1, ou 2, ou 3, ou 4, etc. unités, selon l'étendue des Tables ; et après avoir trouvé le nombre qui répond au logarithme restant, on en séparera sur la droite, par une virgule, autant de chiffres qu'il y aura eu d'unités dans le nombre dont on aura retranché le logarithme.

Par exemple, si l'on demande à quelle fraction appartient —1,532732, je retranche 1,532732 de 4, et il me reste 2,467268, qui dans les Tables se trouve entre les logarithmes de 293 et de 294 ; j'en conclus que la fraction cherchée est entre 0,0294, et 0,0293 ; c'est-à-dire, qu'elle est 0,0293, à moins d'un dix-millième près. En effet, retrancher de 4 le logarithme proposé 1,532732 ; c'est (236) multiplier 10000 par la fraction à laquelle appartient ce même logarithme proposé, ou (ce qui est la même chose), c'est multiplier cette fraction par 10000 ; donc le nombre qu'on trouve est 10000 fois trop grand, il faut donc le compter pour des dix-millièmes.

Tout ce que nous venons de dire trouvera abondamment des applications par la suite. Bornons-nous quant à présent à donner une idée, par quelques exemples, de l'avantage que les logarith-

mes procurent pour la facilité et la promptitude des calculs.

EXEMPLE I.

On demande le quotient de 17954 divisé par 12836, approché jusqu'à moins d'un dix-millième près.

Logarithme de 17954.....	4,254161
Logarithme de 12836.....	4,108430
Reste.....	0,145731

Ce reste, cherché dans les Tables avec une caractéristique plus forte de quatre unités, répond à 13987; donc (258) le quotient cherché est 1,3987.

EXEMPLE II.

On demande la racine cubique de 53, à moins d'un millième près.

Le logarithme de 53 est.....	1,724276
Son tiers (230) est.....	0,574759

Ce dernier, cherché dans les Tables avec une caractéristique plus forte de trois unités, répond à 3756; donc (258) la racine cherchée est 3,756.

Pour juger de l'avantage des logarithmes, on n'a qu'à chercher cette racine par la méthode donnée (156).

EXEMPLE III.

Veut-on avoir, à moins d'un centieme près, la racine cinquieme du cube de 5736?

On triplera le logarithme 3,758609, de 5736, et on aura 11,275827, pour logarithme du cube de 5736. Prenant le cinquieme de ce dernier logarithme, on a 2,255165, pour logarithme de la racine cinquieme du cube de 5736. Ce logarithme, cherché dans les tables, avec une caractéristique plus forte de deux unités, pour avoir des centiemes, répond entre les nombres 17995 et 17996; la racine cherchée est donc 179,95 à moins d'un centieme près.

Remarque.

Lorsque dans une opération où l'on fait usage des logarithmes, il s'en trouve quelques-uns qui doivent être retranchés, on peut simplifier l'opération par l'observation suivante.

Lorsqu'on a à retrancher un nombre quelconque, d'un autre qui est l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans le premier, l'opération se réduit à écrire la différence entre 9 et chacun des chiffres du nombre proposé, à l'exception du dernier pour lequel on écrit la différence entre 10 et ce chiffre.

Par exemple, si j'ai 526927 à retrancher de 1000000; je retranche successivement les chiffres 5, 2, 6, 9, 2, de 9; et le dernier chiffre, je le retranche de 10, et j'ai 473073 pour reste.

Ce reste est ce qu'on appelle le *complément arithmétique* du nombre proposé.

La soustraction faite de cette manière, étant trop simple pour pouvoir être comptée pour une opération, il s'ensuit que lorsqu'on aura à former un résultat, de l'addition et de la soustraction de plusieurs nombres, on pourra toujours réduire l'opération à l'addition.

Par exemple, s'il s'agit d'ajouter les deux nombres 672736, 426452, et de retrancher de leur somme les deux nombres 432752, 18675; ce qui exige deux additions et une soustraction, je substitue à cette opération, la suivante,

	672736
	426452
Complément arith. de 432752.....	567248
Complément arith. de 18675.....	981325
Somme.....	2647761

c'est-à-dire, que j'ajoute ensemble les deux premiers nombres proposés, et les complémens arithmétiques des

deux derniers ; la somme est 2647761. Il faut en supprimer le premier chiffre 2 sur la gauche ; et les chiffres restans 647761 sont le résultat cherché.

La raison de cette opération est facile à appercevoir, en remarquant que si au lieu de retrancher 432752, comme on le proposoit, j'ajoute son complément arithmétique, c'est-à-dire 1000000 moins 432752, je fais en même temps la soustraction proposée, et une augmentation de 1000000, c'est-à-dire d'une dixaine au premier chiffre du résultat ; donc pour chaque complément arithmétique que j'aurai introduit, j'aurai une dixaine de trop à l'égard du premier chiffre du résultat.

L'application de cela aux logarithmes est évidente.

Qu'il soit question, par exemple, de diviser 3760, par 79 ; il faudroit retrancher le logarithme de 79, de celui de 3760. Au lieu de cette opération, j'écris.

Log. 3760.....	3,575188
Complément arith. du log. de 79.....	8,102373
Somme.....	11,677561

Ainsi 1,677561 est le logarithme du quotient, et répond à 47,59 à moins d'un centième près.

Supposons pour second exemple qu'il soit question de multiplier $\frac{675}{527}$ par $\frac{952}{377}$, il faudroit (106) multiplier 675 par 952, et 527 par 377, puis diviser le premier produit par le second. Par logarithmes, on opérera ainsi,

Log. 675.....	2,829304
Log. 952.....	2,978637
Complément arith. du log. de 527.....	7,287189
Complément arith. du log. de 377.....	7,423659
Somme.....	20,509789

Le logarithme du produit est donc 0,509789, qui, cherché avec trois unités de plus à la caractéristique, répond à 3,234.

On peut faire usage du complément arithmétique, pour mettre les logarithmes des fractions, sous la même forme que ceux des nombres entiers,

et les employer de même dans le calcul. Par-là on évitera la distinction des logarithmes négatifs et des logarithmes positifs. Il suffira de se souvenir, que la caractéristique du logarithme des fractions proprement dites, est trop forte de 10 unités.

Par exemple, pour avoir le logarithme de $\frac{3}{4}$, qui (96) n'est autre chose que 3 divisé par 4; au lieu de retrancher le logarithme de 4, de celui de 3; c'est-à-dire, de retrancher le logarithme de 3 de celui de 4, et donner au reste le signe —; (235) au logarithme de 3, j'ajoute le complément arithmétique du logarithme de 4;

Log. 3.....	0,477121
Complément arith. du log. de 4.....	9,397940
Somme.....	9,875061

Cette somme est le logarithme de $\frac{3}{4}$, dont la caractéristique est trop forte de 10 unités. Or il n'est pas nécessaire de faire actuellement la diminution; on peut la rejeter à la fin des opérations dans lesquelles on emploiera ce logarithme.

La même règle s'applique aux fractions décimales.

Ainsi pour avoir le logarithme de 0,575 qui n'est autre chose que $\frac{575}{1000}$; au logarithme de 575, j'ajouterois le complément arithmétique du logarithme de 1000.

En employant ainsi les complémens arithmétiques, au lieu des logarithmes négatifs des fractions, il n'en est pas plus difficile de trouver dans les Tables les valeurs en décimales de ces mêmes fractions. Dès que je saurai qu'un logarithme proposé est, ou renferme un ou plusieurs complémens arithmétiques. Je sais que sa caractéristique est trop forte d'autant de dixaines qu'il y entre de complémens arithmétiques; ainsi si elle passe ce nombre de dixaines, il sera facile de la diminuer, et de trouver le nombre auquel appartient ce logarithme, et qui sera un nombre entier, ou un nombre entier joint à une fraction.

Mais si la caractéristique est au-dessous du nom-

bre de dixaines qu'elle est censée renfermer de trop ; elle appartient certainement à une fraction que je trouverai en cette manière. Je chercherai, par ce qui a été dit (242 et suiv.), à quel nombre répond le logarithme proposé, et lorsque je l'aurai trouvé, j'en séparerai par une virgule, autant de dixaines de chiffres, sur la droite, qu'il y aura de dixaines de trop dans la caractéristique.

Par exemple, si l'on me donnoit 8,732235 pour logarithme, résultant d'une opération, dans laquelle il est entré un complément arithmétique : je vois, puisque sa caractéristique est au-dessous d'une dixaine, qu'il appartient à une fraction. Je cherche d'abord (242) à quel nombre répond 8,732235, considéré comme logarithme de nombre entier ; je trouve qu'il répond à 539802500 ; séparant 10 chiffres, j'ai 0,0539802500 pour valeur très-approchée de la fraction qui répond au logarithme proposé.

Mais comme il est très-rarement nécessaire d'avoir ces fractions à un tel degré de précision, on abrégera, en diminuant tout de suite la caractéristique du logarithme proposé, autant qu'il est nécessaire pour la faire tomber parmi celles des Tables, et prenant seulement le nombre correspondant, on séparera autant de chiffres de moins que ne le prescrit la règle précédente, autant de moins, dis-je, qu'on aura ôté d'unités à la caractéristique.

Ainsi, dans l'exemple présent, je diminuerois la caractéristique de 5 unités, et ayant trouvé que le nombre correspondant est 5398, j'en séparerois seulement 5 chiffres, et j'aurois 0,05398.

Dans les élévations aux puissances, il faudra observer qu'en multipliant (229) le logarithme par le nombre qui marque le degré de la puissance, il se trouvera qu'on multipliera aussi ce dont la caractéristique se trouvera être trop forte ; ainsi, en

élevant au cube, par exemple, s'il entre un complément arithmétique dans le logarithme proposé; c'est-à-dire, si la caractéristique est trop forte de 10 unités, celle du logarithme du cube, sera trop forte de 30 unités, et ainsi des autres; il sera donc facile de la ramener à sa juste valeur.

Dans les extractions de racines, pour éviter toute méprise lorsqu'il entrera des complémens arithmétiques dans les logarithmes dont on fera usage, on aura soin d'ajouter ou d'ôter à la caractéristique, autant de dixaines qu'il est nécessaire, pour que ce dont elle sera trop forte, soit précisement d'autant de dixaines qu'il y a d'unités dans le nombre qui marque le degré de la racine, et ayant, conformément à la règle ordinaire, divisé par le nombre qui marque le degré de la racine, la caractéristique sera trop forte précisément de 10 unités.

Par exemple, si l'on demande la racine cubique de $\frac{276}{547}$; au logarithme de 276, j'ajoute le complément arithmétique de celui de 547.....

Logarithme 276.....	2,440909
complément arith. du log. de 547.....	7,262013
Somme.....	9,702922
à la caractéristique de laquelle j'ajoute...	20.....
	29,702922

Afin qu'elle devienne trop forte de 3 dixaines, et j'ai 29,702922, dont le tiers 9,900974 est le logarithme de la racine cubique demandée, mais avec 10 unités de trop à la caractéristique; ainsi, conformément à ce qui a été observé ci-dessus je trouve que cette racine cubique est 0,7961, à moins d'un millième près.

L'usage des compléments arithmétiques, est principalement utile dans les calculs de la Trigonométrie, et par conséquent dans plusieurs des opérations du Pilotage que l'on veut faire avec une certaine exactitude.

TABLE DES POIDS ET MESURES
employés dans l'Arithmétique, et des Caractères qui servent à les désigner.

Pour les Poids.

Poids de marc ou de Paris.

℔ signifie livre..... livre.
M..... marc.
O ou ℥..... once.
G ou ʒ..... gros ou dragme.
D ou ℈..... denier ou scrupule.
G..... grain.

				grains.
			1 denier.	24
		1 gros.	3	72
	1 once.	8	24	576
1 marc.	8	64	192	4608
1 livre.	2	16	128	384	9216

Poids Anglois de Troy.

On emploie ce poids en Angleterre pour les matières de petit volume et précieuses ; l'once vaut 585 $\frac{1}{2}$ grains, poids de Paris.

				grains
			1 scrupule.	20
		1 dragme.	3	60
	1 once.	8	24	480
1 livre.	12	96	288	5760

Poids Anglois, Avoir du poids.

On se sert de ce poids en Angleterre pour les matières pesantes et de gros volume; on l'emploie dans l'artillerie; l'once vaut 533 $\frac{1}{2}$ grains, poids de Paris.

			dragmes.
		1 once.	16
	1 livre.	16	256
1 quintal.	112	1792	28672

Pour les Mesures des Longueurs.

t. signifie.....	toise.
pi	pied.
po.....	pouce.
l.....	ligne.
pt.....	point.

				points.
			1 ligne.	12
		1 pouce.	12	144
	1 pied.	12	144	1728
1 toise.	6	72	864	10368

Chaque case de ces Tables, marque combien l'unité qui commence la même ligne horizontale, contient d'unités de

l'espèce de celle qui répond verticalement au-dessus de cette même case.

Le pas ordinaire vaut.....	2 pieds $\frac{1}{2}$
Le pas géométrique.....	5 pieds.
La brasse	5 pieds.
L'aune de Paris.....	3 pi 7po 10l $\frac{4}{5}$
Le pied de Roi étant divisé en.....	1440 parties.
Le pied de Londres en contient.....	1351,7.
Le pied du Rhin.....	1392.

Pour les Monnoies.

Caractères.

℔ signifie....livres.

s.....sou.

d.....denier.

Subdivisions.

		deniers.
	1 sou.	12
1 livre.	20	240

Pour le Temps.

j signifie.....	jour.
h	heure.
′	minute.
″	seconde.

			secondes.
		1 minute.	60
	1 heure.	60	3600.
1 jour.	24	1440	86400

TABLE DES MATIERES.

NOTIONS préliminaires sur la nature et les différentes especes de Nombres. *Page* 1
De la Numération et des Décimales. 2
Des Opérations de l'Arithmétique. 11
De l'Addition des Nombres entiers et des parties décimales. *ibid.*
De la Soustraction des Nombres entiers et des parties décimales. 14
De la Preuve de l'Addition et de la Soustraction. 17
De la Multiplication. 19
De la Multip. par un nombre d'un seul chiffre. 23
De la Multip. par un nomb. de plusieurs chiffres. 24
De la Multiplication des décimales. 26
Quelques usages de la Multiplication. 30
De la division des Nombres entiers et des parties Décimales. 32
De la Division d'un nombre composé de plusieurs chiffres, par un nombre qui n'en a qu'un. 33
De la Division par un nombre de plusieurs chiffres. 36
Moyen d'abréger la méthode précédente. 40
De la Division des Parties décimales. 42
Preuve de la Multiplication et de la Division. 50
Preuve par 9. 51
Quelques usages de la Regle précédente. 53
Des Fractions. 55
Des Entiers considérés sous la forme de Fraction. 57
Des changemens qu'on peut faire subir aux Fractions, sans en changer la valeur. 58
Réduction des Fractions à un même dénominateur. 59
Réduction des Frac. à leur plus simple expression. 61
Différentes manieres dont on peut envisager une Fraction, et conséquences qu'on peut en tirer. 64
Des Opérations de l'Arithmét. sur les Fractions. 65
De l'Addition des Fractions. *ibid.*
De la Soustraction des Fractions. 66
De la Multiplication des Fractions. *ibid.*
De la Division des Fractions. 68
Quelques applications des Regles précédentes. 69

Des Fractions de Fractions. *Page* 70
Des Nombres complexes. 73
Table des Unités de quelques especes, et caracteres par lesquels on représente ces différentes unités. *ibid.*
Addition des Nombres complexes. 74
Soustraction des Nombres complexes. 75
Multiplication des Nombres complexes. 76
Division d'un nombre complexe par un nombre incomplexe. 82
Division d'un Nombre complexe par un Nombre complexe. 84
De la formation des Nombres quarrés et de l'extraction de leur racine. 85
De la formation des Nombres cubes et de l'extraction de leur racine. 100
Des Raisons, Proportions et Progressions, et de quelques Regles qui en dépendent. 110
Propriétés des Proportions Arithmétiques. 114
Propriétés des Proportions Géométriques. 115
Usages des propositions précédentes. 123
De la Regle de *Trois* directe et simple. *ibid.*
De la Regle de *Trois* inverse et simple. 126
De la Regle de *Trois* composée. 128
De la Regle de Société. 130
Remarque au sujet de la Regle précédente. 133
De quelques autres Regles dépendantes des Proportions. 134
De la Regle d'Alliage. 137
Des Progressions Arithmétiques. 138
Des Progressions Géométriques. 141
Des Logarithmes. 146
Table des Logarithmes des Nombres naturels depuis 1 jusqu'à 200. 150
Propriétés des Logarithmes. 152
Usages des Logarithmes. 154
Des Nombres dont les Logarithmes ne se trouvent point dans les Tables. 156
Des Logarithmes dont les Nombres ne se trouvent point dans les Tables. 161
REMARQUE. 167

FIN.